| | |
|---|---|
| **MA-11A Álgebra** | **30 de Noviembre, 2000** |

# Pauta Examen 1

PROBLEMA 1:

(i.1).- Hay varias formas de hacer esta parte, veremos algunas.

- **Primera Forma**: Como $A$ es invertible sí y sólo si su determinante es no nulo, y $\mathrm{Det}(A) = a+2-b-3 = a-b-1$, se tiene que $A$ es invertible sí y sólo si $a \neq b+1$.

- **Segunda Forma**: Una matriz es invertible sí y sólo si al escalonarla se obtienen sólo pivotes no nulos. Escalonando $A$, tenemos que

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-b \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-b-1 \end{pmatrix}.$$

Luego, $A$ es invertible sí y sólo si $a-b-1 \neq 0$, i.e., $a \neq b+1$.

- **Tercera Forma**: Como $A$ es invertible sí y sólo si sus filas son linealmente independientes, bastará ver bajo que condiciones se tiene esto último. Sean entonces $\alpha, \beta, \gamma$ tales que

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a \end{pmatrix} = 0. \tag{1}$$

Lo anterior equivale a decir que $\alpha+\gamma = 0$, $2\alpha+\beta+3\gamma = 0$, y $b\alpha+\beta+a\gamma = 0$. Despejando $\gamma$ y $\beta$ de las dos primeras ecuaciones y sustituyendo en la última se obtiene que $(b+1-a)\alpha = 0$. Luego, si $a \neq b+1$, el sistema (1) no tiene solución no nula, i.e., $A$ es invertible.

(i.2).- El vector $b = (1,1,3)^T$ pertenece a $\mathbb{I}m(A)$ sí y sólo si existe $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $Ax = b$. Debemos entonces determinar cuando dicho sistema lineal tiene solución. Para ello debemos escalonar la matriz aumentada $(A\,|\,b)$, i.e.,

$$(A\,|\,b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & a & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-b & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-b-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, el sistema tiene solución sí y sólo si $a \neq b+1$, i.e., $(1,1,3)^T$ pertenece a la imagen de $A$ sí y sólo si $a \neq b+1$.

(i.3).- Veremos dos formas de resolver esta parte.

- **Primera Forma**: Claramente las dos primeras columnas de $A$ son linealmente independientes. Luego, el rango de $A$ es al menos 2. Por Teorema Núcleo Imagen sigue que el kernel de $A$ tiene dimensión a lo más 1, i.e., su dimensión puede ser 0 o 1. El primer caso se tiene sí y sólo si $A$ es invertible. Por lo tanto, el kernel de $A$ tiene dimensión 1 sí y sólo si $A$ es no invertible. Por (i), sabemos que lo último equivale a decir que $a = b+1$.

- **Segunda Forma**: Para que el kernel de $A$ tenga dimensión 1 el sistema homogéneo $Ax = 0$ debe tener como solución un espacio de dimensión 1. Para que ello ocurra, al escalonar $A$ debe aparece sólo una fila nula. Escalonando, vemos que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-b \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-b-1 \end{pmatrix}.$$

Luego, al escalonar se llega a una fila nula sí y sólo si $a = b + 1$.

Para $a = b + 1$, tenemos que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & b+1 \end{pmatrix}$. Luego, como $\begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & b+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b-2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$, sigue que $\mathbb{K}er(A) = \langle\{(b-2, 1, -1)^T\}\rangle$.

(ii).- Debemos determinar $v_1, v_2, v_3$ tales que $Av_1 = e_1$, $Av_2 = e_2$, y $Av_3 = e_3$. Equivalentemente, queremos determinar la matriz $V \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ cuya $i$–ésima columna es $v_i$ y tal que $AV = I$. Claramente, la inversa de $A$ en caso que exista satisface las propiedades que queremos de $V$. De un sencillo cálculo algebraico se obtiene que la inversa de $A$ existe y

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sigue que la base buscada es $(-1, 1, -1)^T$, $(-4, 2, -1)^T$, y $(2, -1, 1)^T$.

PROBLEMA 2:

(i).- Matricialmente, la ecuación de la cónica queda

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2.$$

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Como es simétrica, es diagonalizable. En particular, su polinomio característico es $(1-\lambda)^2 - 9$. Luego, $A$ tiene valores propios 4 y $-2$, con vectores propios asociados $(1, 1)^T$ y $(1, -1)^T$ respectivamente. Sigue que $A = PDP^T$ donde

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \text{y} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Haciendo el cambio de variable $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ se obtiene la ecuación de la cónica

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 4u^2 - 2v^2 + 8u = -2.$$

Simplificando, se obtiene que $2u^2 - v^2 + 4u = -1$. Haciendo ahora el cambio de variable $\widetilde{u} = u - \alpha$ y $\widetilde{v} = v$ se obtiene que

$$2\widetilde{u}^2 - \widetilde{v} + 4(\alpha + 1)\widetilde{u} = -1 - 2\alpha^2 - 4\alpha.$$

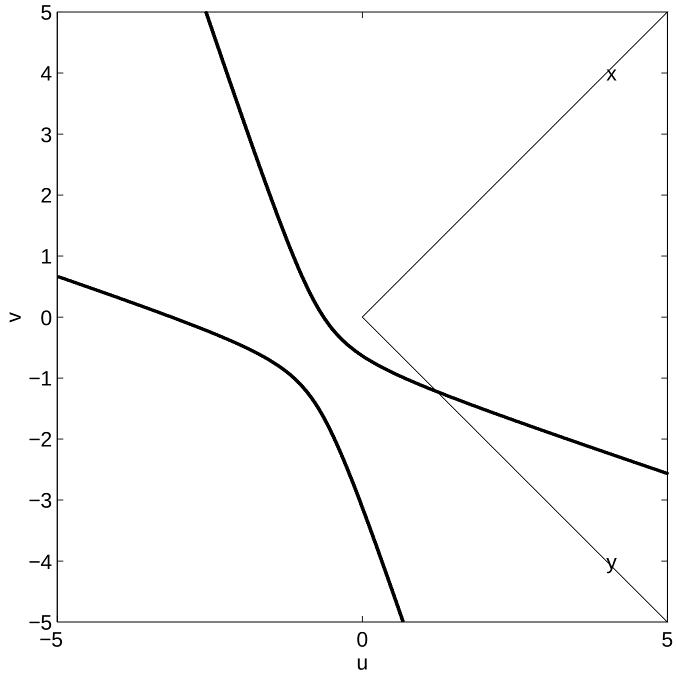


Figura 1: Hipérbola

Luego, si $\alpha = -1$, i.e., hacemos el cambio de variable $\begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y obtenemos

$$2\widetilde{u}^2 - \widetilde{v}^2 = 1 .$$

Sigue que la cónica es una hipérbola. Su grafo se ilustra en la Figura .

Nota 1: Los cambios de variables también podrían haberse hecho en el orden inverso, i.e., primero la translación y luego la rotación. El resultado es similar, pero los cálculos son más engorrosos.

Nota 2: Los ejes $u$ y $v$ podrían haber quedado orientados al revés de lo que señala en el dibujo, dependiendo de que vectores propios se eligieran. Por ejemplo, si en vez de elegir el vector propio $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$ se hubiese elegido $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^T$.

(ii).- Supongamos que existe $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tal que $A = B^T B$. Como $A^T = B^T (B^T)^T = A$, sigue que $A$ es simétrica. Para probar que $A$ es definida positiva bastará verificar que si $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, entonces $x^T A x > 0$. En efecto, $x^T A x = x^T B^T B x = (Bx)^T (Bx) = ||Bx||^2 > 0$ para todo $x \neq 0$ puesto que la invertibilidad de $B$ garantiza que $Bx \neq 0$ si $x \neq 0$.

Supongamos ahora que $A$ es simétrica y definida positiva. Como $A$ es simétrica existen $P$ unitaria y $D$ diagonal tal que $A = PDP^T$. Como $A$ es definida positiva, todos los elementos en la diagonal de $D$ son positivos, por los que sus raíces cuadradas existen. Denotemos por $\sqrt{D}$ la matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal son las raíces cuadradas de los correspondientes coeficientes en la diagonal de $D$. Sigue que $D = \sqrt{D}\sqrt{D}$, por lo que

$$A \;=\; P\sqrt{D}\sqrt{D}P^T \;=\; P\sqrt{D}\sqrt{D}^T P^T \;=\; P\sqrt{D}(P\sqrt{D})^T .$$

Haciendo $B = (P\sqrt{D})^T$ obtenemos que $A = B^T B$. Para ver que $B$ es invertible basta observar que es el producto de dos matrices invertibles ($P^T$ que es unitaria, por lo tanto invertible, y $\sqrt{D}^T$ que es una matriz diagonal con coeficientes no nulos en la diagonal, por lo tanto también invertible).

Sigue que si $A$ es simétrica definida positiva, entonces existe una matriz $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ invertible cuyas columnas podemos denotar $v_1, \ldots, v_n$ tal que $A = B^T B$. Equivalentemente, $A_{i,j} = v_i^T v_j = \langle v_i, v_j\rangle$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

(iii).- Supongamos que existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i v_i^T = 0$. Post-multiplicando por $v_j$, y observando que $v_i^T v_j = \langle v_i, v_j\rangle$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \langle v_i, v_j\rangle \;=\; 0 .$$

Como $v_1, \ldots, v_k$ son ortogonales, $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ si $i \neq j$. Por lo tanto, $0 = \alpha_j v_j \langle v_j, v_j\rangle = \alpha_j v_j ||v_j||^2$. Como $||v_j|| \neq 1$, sigue que $\alpha_j v_j = 0$. Pero $v_j \neq 0$, luego $\alpha_j = 0$. Como $j$ es cualquier elemento en $\{1, \ldots, k\}$, tenemos que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$, i.e., $v_1 v_1^T, \ldots, v_k v_k^T$ son linealmente independientes.

PROBLEMA 3:

(i).- Observar que para $u \in \mathbb{R}^n$, $Au \;=\; \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \cdot v_i v_i^T u \;=\; \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \cdot v_i \langle v_i, u\rangle .$

Si $u \in \langle\{v_1, \ldots, v_k\}\rangle^\perp$, se tiene que $\langle v_i, u\rangle = 0$ y por lo tanto $Au = 0$, i.e., $\langle\{v_1, \ldots, v_k\}\rangle^\perp \subseteq \mathbb{K}er(A)$.

Por otro lado, si $u = v_j$, por ortogonalidad de los $v_i$'s, sigue que $\langle v_i, u\rangle = 0$ si $i \neq j$ y $\langle v_i, u\rangle = ||v_j||^2$ si $i = j$. Luego, $Av_j = \gamma_j v_j ||v_j||^2 \in \langle\{v_1, \ldots, v_k\}\rangle$. Observar que $\gamma_j ||v_j||^2 = \gamma_j \neq 0$ puesto que $\gamma_j \neq 0$ y $v_j$ es de norma 1. Sigue que $A(v_j/\gamma_j) = v_j$, i.e., $\langle\{v_1, \ldots, v_k\}\rangle \subseteq \mathbb{I}m(A)$.

Tenemos entonces que $\langle\{v_1, \ldots, v_k\}\rangle^\perp \subseteq \mathbb{K}er(A)$ y $\langle\{v_1, \ldots, v_k\}\rangle \subseteq \mathbb{I}m(A)$. Para concluir se puede proceder de dos formas.

- **Primera Forma**: Como $\langle\{v_1, \ldots, v_k\}\rangle^\perp \subseteq \mathbb{K}er(A)$ sabemos que $\dim(\mathbb{K}er(A)) \geq n - k$. Además, como $\langle\{v_1, \ldots, v_k\}\rangle \subseteq \mathbb{I}m(A)$, tenemos que $\dim(\mathbb{I}m(A)) \geq k$. Por Teorema Núcleo Imagen, $n = \dim(\mathbb{K}er(A)) + \dim(\mathbb{I}m(A)) \geq \dim(\mathbb{K}er(A)) + k$, i.e, $n - k \geq \dim(\mathbb{K}er(A))$. Sigue que $\dim(\mathbb{K}er(A)) = n - k$ y $\dim(\mathbb{I}m(A)) = k$. Por lo tanto, las dos inclusiones $\langle\{v_1, \ldots, v_k\}\rangle^\perp \subseteq \mathbb{K}er(A)$ y $\langle\{v_1, \ldots, v_k\}\rangle \subseteq \mathbb{I}m(A)$ deben ser igualdades ya que $\langle\{v_1, \ldots, v_k\}\rangle^\perp$ y $\langle\{v_1, \ldots, v_k\}\rangle$ son espacios de dimensión $n - k$ y $k$ respectivamente.

- **Segunda Forma**: Si $u \in \mathbb{K}er(A)$, entonces $Au = 0$. Luego, $\sum_{i=1}^k \gamma_i v_i \langle v_i, u\rangle = 0$. Como los $v_i$'s son linealmente independientes, sigue que $\gamma_1\langle v_1, u\rangle = \ldots = \gamma_k\langle v_k, u\rangle = 0$. Como $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ son no nulos, sigue que $\langle v_1, u\rangle = \ldots = \langle v_k, u\rangle = 0$, i.e., $u \in \langle\{v_1, \ldots, v_k\}\rangle^\perp$. Por lo tanto, $\mathbb{K}er(A) \subseteq \langle\{v_1, \ldots, v_k\}\rangle^\perp$. La igualdad también se tiene puesto que ya vimos que $\langle\{v_1, \ldots, v_k\}\rangle^\perp \subseteq \mathbb{K}er(A)$.

Observando que $Av_j = \gamma_j v_j$, se concluye que $\mathbb{I}m(A) \subseteq \langle\{v_1, \dots, v_k\}\rangle$. La igualdad también se tiene puesto que ya vimos que $\langle\{v_1, \dots, v_k\}\rangle \subseteq \mathbb{I}m(A)$.

Como $\mathbb{I}m(A) = \langle\{v_1, \dots, v_k\}\rangle$, sigue que $rango(A) = \dim \mathbb{I}m(A) = k$.

(ii).- Como $w_1, \dots, w_{n-k}$ son elementos del kernel de $A$, son vectores propios asociados al valor propio 0. Además, como $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ si $i \neq j$,

$$Av_j \;=\; \sum_{i=1}^{k} \gamma_i v_i v_i^T v_j \;=\; \sum_{i=1}^{k} \gamma_i v_i \langle v_i, v_j\rangle \;=\; \gamma_j v_j ||v_j||^2 \,.$$

Es decir, $v_j$ es vector propio de $A$ asociado al valor propio $\gamma_j ||v_j||^2 = \gamma_j$, donde la igualdad se tiene porque $v_j$ es de norma 1.

Para ver que $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k}\}$ es base de $\mathbb{R}^n$ observar que $\{v_1, \dots, v_k\}$ y $\{w_1, \dots, w_{n-k}\}$ son conjuntos ortogonales de vectores. Además, por (i) los vectores $w_1, \dots, w_{n-k}$ están en $\langle\{v_1, \dots, v_k\}\rangle^{\perp}$. Luego, son ortogonales a $v_1, \dots, v_k$. Por lo tanto $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k}\}$ es un conjunto de $n$ vectores en $\mathbb{R}^n$ no nulos y ortogonales, i.e., constituyen una base de $\mathbb{R}^n$

(iii).- Veremos dos formas de hacer esta parte.

- **Primera Forma**: Las partes (i) y (ii) sugieren tomar $\gamma_1$ y $\gamma_2$ como los valores propios de la matriz $A$ y $\{v_1, v_2\}$ como una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ de vectores propios de $A$.

  El polinomio característico de $A$ es $(5/4-\lambda)^2 - 9/4$. Los valores propios de $A$ son las soluciones de $(5/4-\lambda)^2 = 9/4$, i.e., 2 y 1/2. Los espacios de vectores propios asociados son,

  $$W_2 \;=\; \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle, \qquad \text{y} \qquad W_{1/2} \;=\; \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

  Luego, una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ de vectores propios de $A$ esta dada por $\{v_1, v_2\}$ donde $v_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^T$ y $v_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$. Por lo tanto,

  $$2v_1v_1^T + \frac{1}{2}v_2v_2^T \;=\; 2\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 5/4 & -3/4 \\ -3/4 & 5/4 \end{pmatrix} \;=\; A\,.$$

  <u>Nota</u>: También podría haberse elegido $-v_1$ en vez de $v_1$ y/o $-v_2$ en vez de $v_2$. Por lo demás, $v_1$ y $v_2$ pueden aparecer intercambiados.

- **Segunda Forma**: Una alternativa, que no se basa en las conclusiones obtenidas en (i) y (ii), pero que conlleva un esfuerzo significativamente mayor, consiste en resolver un sistema (no lineal) de ecuaciones. Específicamente, sean $v_1 = (a, b)^T$ y $v_2 = (c, d)^T$. Como $v_1$ y $v_2$ deben ser de norma 1, se tiene que $a^2 + b^2 = 1$ y $c^2 + d^2 = 1$. Como $v_1$ y $v_2$ deben ser ortogonales, $ac + bd = 0$. Luego, como $A = \gamma_1 v_1 v_1^T + \gamma_2 v_2 v_2^T$,

  $$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5/4 & -3/4 \\ -3/4 & 5/4 \end{pmatrix} \;&=\; \gamma_1 \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} c^2 & cd \\ cd & d^2 \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} \gamma_1 a^2 + \gamma_2 c^2 & \gamma_1 ab + \gamma_2 cd \\ \gamma_1 ab + \gamma_2 cd & \gamma_1 b^2 + \gamma_2 d^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

  Un laborioso despeje lleva a las mismas conclusiones obtenidas en la **Primera Forma**.