MA-11A Álgebra **5 de Enero, 2001**

Pauta Examen 2

PROBLEMA 1:

(i).- Como el cálculo de las potencias de una matriz se simplifica cuando esta es diagonalizable, primero veremos si podemos diagonalizar Q. Para ello calculamos sus valores y vectores propios. Primero observemos que el polinomio característico de Q es

$$\begin{aligned} p_Q(\lambda) &= (-1-\lambda)^2(3-\lambda)+8+8-4(3-\lambda)+4(-1-\lambda)+4(-1-\lambda) \\ &= [(-1-\lambda)^2-4](3-\lambda)+8(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)(-3-\lambda)(3-\lambda)+8(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)^2(-1-\lambda)\,. \end{aligned}$$

Luego, los valores propios de Q son 1 con multiplicidad algebraica 2 y -1 con multiplicidad algebraica 1.

Para determinar el subespacio W_1 de vectores propios de Q asociados al valor propio 1 hay que resolver el sistema

$$0=(P-I)x=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene que $W_1=\left\langle\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right\rangle$, i.e., 1 tiene multiplicidad geométrica 2.

Como el subespacio W_{-1} de vectores propios de Q asociados al valor propio -1 tiene dimensión al menos 1 (porque $W_{-1}\neq\{0\}$) y a lo más la multiplicidad algebraica del valor propio -1, sigue que la dimensión de W_{-1} es 1. Es decir, la multiplicidad geométrica de -1 es 1. Como las multiplicidades algebraicas y geométricas de los valores propios de Q coinciden, Q es diagonalizable. Por lo tanto existe D diagonal y P invertible tales que $Q=PDP^{-1}$ donde

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Como $D^{15}=D$ sigue que $Q^{15}=PD^{15}P^{-1}=PDP^{-1}=Q$.

<u>Nota</u>: Se podía explicitar P, pero en realidad no es necesario.

(ii.1).- Sean A y A' matrices en $M_{2,2}(\mathbb{R})$ y $\lambda\in\mathbb{R}$. Sigue que

$$T(\lambda A+A')=M(\lambda A+A')=\lambda MA+MA'=\lambda T(A)+T(A')\,.$$

Por lo tanto, T es lineal.

(ii.2).- Basta observar que

$$A \in \mathbb{K}er(T) \iff 0 = T(A) = MA \iff MA_{*,i} = 0\,,\ \forall i \in \{1,2\} \iff A_{*,1}, A_{*,2} \in \mathbb{K}er(M)\,.$$

(ii.3).- Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Sigue que

$$T(A) = MA = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = (a-c)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (b-d)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Luego, $T(A) \in \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$. Como además, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son claramente linealmente independientes, se tiene que una base de $\mathbb{I}m(T)$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

PROBLEMA 2:

(i.1).- La ecuación de la cónica es $\widetilde{u}^2 + \dfrac{\widetilde{v}^2}{4} = 1\,.$

(i.2).- Como $u = \widetilde{u}$ y $v = \widetilde{v} - 2$, la ecuación de la cónica es

$$u^2 + \frac{(v+2)^2}{4} = 1 \iff u^2 + \frac{v^2}{4} + v = 0\,.$$

(i.3).- Como $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, la ecuación de la cónica queda

$$\frac{(x-y)^2}{2} + \frac{(x+y)^2}{8} + \frac{x+y}{\sqrt{2}} = 0 \iff \frac{5x^2}{8} + \frac{5y^2}{8} - \frac{3xy}{4} + \frac{x+y}{\sqrt{2}} = 0\,.$$

(ii).- Observar que N es vector unitario. Luego, identificando los términos de la figura del enunciado tenemos que $H_P = ||P - P^*|| = 6$, $H_Q = ||Q - Q^*|| = 2$, $L = ||P^* - Q^*|| = ||(6,8,0)^T|| = \sqrt{100} = 10$. Sigue que

$$\frac{L_Q}{2} = \frac{10 - L_Q}{6}\,.$$

Por lo tanto, $4L_Q = 10$, i.e., $L_Q = 5/2$ y $L_P = 15/2$. Sigue que

$$X = Q^* + \frac{L_Q}{L}(P^* - Q^*) = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5/2}{10}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

PROBLEMA 3:

(i).- Si $Px = 0$, entonces $\sum_{i=1}^{n} x_i P_{*,i} = 0$. Por independencia lineal de las columnas de P, sigue que $x_i = 0$ cualquiera sea $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Para determinar $\mathbb{K}er(P^TP)$ observar primero que trivialmente se tiene que $\{0\} \subseteq \mathbb{K}er(P^TP$. Para concluir el inclusión contraria notar que si $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$P^TPx = 0 \Longrightarrow x^TP^TPx = 0 \Longleftrightarrow ||Px||^2 = (Px)^TPx = 0 \Longleftrightarrow Px = 0 \Longleftrightarrow x = 0\,.$$

Donde la última equivalencia es consecuencia del hecho establecido en el párrafo anterior. Sigue que $\mathbb{K}er(P^TP) = \{0\}$.

Como P^TP es una matriz cuadrada (de $m \times m$) cuyo kernel es $\{0\}$, su rango debe ser m, i.e., es invertible.

(ii).- Veamos primero que A es simétrica. En efecto, $A^T = (P(P^TP)^{-1}P^T)^T = (P^T)^T((P^TP)^{-1})^TP^T = P((P^TP)^T)^{-1}P^T = P(P^TP)^{-1}P^T = A$.

Por otro lado $AP = P(P^TP)^{-1}P^TP = P[(P^TP)^{-1}(P^TP)] = P$, donde la última igualdad es consecuencia del hecho que $(P^TP)^{-1}$ es la inversa de P^TP.

(iii).- Si $Z \in \mathbb{I}m(P)$, entonces existe un $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Z = Px$, luego

$$\langle Y - \widetilde{Y}, Z\rangle = \langle Y, Px\rangle - \langle AY, Px\rangle = Y^TPx - (AY)^TPx = Y^TPx - Y^TA^TPx\,.$$

Por (ii), $A^TP = AP = P$. Luego, $\langle Y - \widetilde{Y}, Z\rangle = Y^TPx - Y^TPx = 0$, i.e., $Y - \widetilde{Y}$ y Z son ortogonales.

(iv).- Como $\widetilde{Y} = AY = P((P^TP)^{-1}P^TY)$ y $(P^TP)^{-1}P^TY \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $\widetilde{Y} \in \mathbb{I}m(P)$. Luego,

$$\begin{aligned} ||Y - Z||^2 &= ||(Y - \widetilde{Y}) + (\widetilde{Y} - Z)||^2 \\ &= ||Y - \widetilde{Y}||^2 + ||\widetilde{Y} - Z||^2 - 2\langle Y - \widetilde{Y}, \widetilde{Y} - Z\rangle\,. \end{aligned}$$

Pero, $\langle Y - \widetilde{Y}, \widetilde{Y} - Z\rangle = \langle Y - \widetilde{Y}, \widetilde{Y}\rangle - \langle Y - \widetilde{Y}, Z\rangle = 0$, donde la última igualdad es consecuencia de (iii). Sigue que

$$||Y - Z||^2 = ||Y - \widetilde{Y}||^2 + ||\widetilde{Y} - Z||^2 \geq ||Y - \widetilde{Y}||^2\,.$$