MA-11A Álgebra **9 de Enero, 2002**

Pauta Examen 2

PROBLEMA 1:

(i).- Sean $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ y $X, X' \in V$. Hay que probar que $\alpha X + \alpha' X' \in V$. En efecto, como X y X' pertenecen a V se tiene que $AX = XB$ y $AX' = X'B$. Luego,

$$A(\alpha X + \alpha' X') = \alpha AX + \alpha' AX' = \alpha XB + \alpha' X'B = (\alpha X + \alpha' X')B\,.$$

Sigue que $\alpha X + \alpha' X' \in V$.

(ii.1).- Primero expresamos A y B en la forma PD_AP^t y QD_BQ^t respectivamente. Para ello observamos (cálculos aritméticos omitidos) que los polinomios característicos de A y B son $P_A(\lambda) = \lambda(6-\lambda)(6+\lambda)$ y $P_B(\lambda) = (2-\lambda)(6-\lambda)$ respectivamente.

Luego, el conjunto de valores propios de A y B son $\{-6, 0, 6\}$ y $\{2, 6\}$ respectivamente. Sigue que

$$D_A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Por lo que $D_AY = YD_B$ implica que

$$\begin{pmatrix} -6y_{1,1} & -6y_{1,2} \\ 0 & 0 \\ 6y_{3,1} & 6y_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_{1,1} & 6y_{1,2} \\ 2y_{2,1} & 6y_{2,2} \\ 2y_{3,1} & 6y_{3,2} \end{pmatrix}.$$

Luego, $y_{1,1} = y_{1,2} = y_{2,1} = y_{2,2} = y_{3,1} = 0$ y $y_{3,2}$ es cualquiera. Por lo tanto, el conjunto de soluciones $Y \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ del sistema $D_AY = YD_B$ es $\langle\{E\}\rangle$, done

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Claramente, $\{E\}$ es base de dicho conjunto de soluciones.

(ii.2).- Observamos que $AX = XB$ si y sólo si $PD_AP^tX = XQD_BQ^t$. Luego,

$$AX = XB \iff D_A(P^tXQ) = (P^tXQ)D_B\,.$$

Por (ii.1), sigue que $AX = XB$ si y sólo si $P^tXQ \in V$, o equivalentmente $X \in \langle\{PEQ^t\}\rangle$. Sigue que $\{PEQ^t\}$ es base de V.

Para determinar P observamos (cálculos aritméticos omitidos) que los vectores propios de P asociados a los valores propios -6, 0 y 6 son $(2,1,1)^t/\sqrt{6}$, $(0,1,-1)^t/\sqrt{2}$ y $(-1,1,1)^t/\sqrt{3}$ respectivamente.

Analogamente, los vectores propios de Q asociados a los valores propios 2 y 6 son $(1,-1)^t/\sqrt{2}$ y $(1,1)^t/\sqrt{2}$ respectivamente. Luego,

$$P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, una base de V es (cálculos aritméticos omitidos)

$$\{PEQ^t\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

PROBLEMA 2:

(i).- Con respecto a los ejes (u,v) una parábola que pasa por los puntos $(u_0,v_0) = (-\sqrt{2},0)$, $(u_1,v_1) = (0,-\sqrt{2})$ y $(u_2,v_2) = (\sqrt{2},0)$ está dada por la ecuación

$$v = cte \cdot (u-u_0)(u-u_2)\,.$$

El valor de cte queda deteminado por el hecho que $v_1 = cte(-u_0)(-u_2)$, i.e., $cte = 1/\sqrt{2}$. La ecuación de la parábola es entonces,

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(u-\sqrt{2}\right)\left(u+\sqrt{2}\right).$$

Finalmente, como $u = (x-y)/\sqrt{2}$ y $v = (x+y)/\sqrt{2}$ sigue que

$$x+y = \frac{1}{2}(x-y-2)(x-y+2) = \frac{1}{2}\left[(x-y)^2-4\right],$$

de donde la ecuación de la parábola en el sistema de coordenadas (x,y) queda

$$x^2+y^2-2xy-2x-2y-4=0\,.$$

(ii.1).- En efecto, como $\alpha A + (1-\alpha)B = (1-\alpha)A\left(A^{-1}B - \alpha/(\alpha-1)I\right)$, por propiedades del determinante y por definición de polinomio característico,

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}\,(\alpha A + (1-\alpha)B) &= (1-\alpha)^n \mathrm{Det}\left[A\left(A^{-1}B - \frac{\alpha}{\alpha-1}I\right)\right] \\ &= (1-\alpha)^n \mathrm{Det}(A)\mathrm{Det}\left(A^{-1}B - \frac{\alpha}{\alpha-1}I\right) \\ &= (1-\alpha)^n \mathrm{Det}(A) P_{A^{-1}B}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right). \end{aligned}$$

(ii.2).- Como $P_{A^{-1}B}(\cdot)$ es un polinomio de grado n tiene a lo más n raíces. Sea λ_* la menor de todas ellas. Si existe $0<\alpha_*<1$ tal que $\alpha_*/(\alpha_*-1) < \lambda_*$, entonces $P_{A^{-1}B}(\alpha_*/(\alpha_*-1)) \neq 0$.

Luego, por (ii.1), se tendría que $\mathrm{Det}(\alpha_* A + (1-\alpha_*)B) \neq 0$, i.e., $\alpha_* A + (1-\alpha_*)B$ es invertible.

La existencia de α_* con las propiedades deseadas esta garantizada puesto que si $\lambda_* \geq 0$ entonces para todo $0 < \alpha_* < 1$

$$\frac{\alpha_*}{\alpha_* - 1} < 0 \leq \lambda_* .$$

Si por el contrario, $\lambda_* < 0$, cualquier $1 > \alpha_* > \max\{\lambda_*/(\lambda_* - 1), 0\}$ sastisface las propiedades deseadas.

PROBLEMA 3:

(i.1).- Observar que

$$(x - x_0)^t A(x - x_0) - x_0^t A x_0 + c = x^t A x - x_0^t A x - x^t A x_0 + c = x^t A x - 2x^t A x_0 + c .$$

Luego, $2x_0 = A^{-1}b$ implica que

$$(x - x_0)^t A(x - x_0) - x_0^t A x_0 + c = x^t A x - x^t b + c = x^t A x - b^t x + c = f(x) .$$

(i.2).- Como A es definida positiva, $(x - x_0)^t A(x - x_0) \geq 0$ cualquiera sea x. Sigue, por (i.1), que

$$f(x) \geq -x_0^t A x_0 + c = f(x_0) .$$

Es obvio que la igualdad se alcanza cuando $x = x_0$. Más aun, si $f(x) = f(x_0)$, entonces se debe tener que $(x - x_0)^t A(x - x_0) = 0$, lo cual es posible (dado que A es definida positiva) solamente cuando $x - x_0 = 0$, i.e., cuando $x = x_0$.

(ii.1).- Notar que

$$f(s,u) = ||X(s) - Y(u)||^2 = ||(P - Q) + (sD - uE)||^2 = ||sD - uE||^2 + 2\langle P - Q, sD - uE\rangle + ||P - Q||^2 .$$

Observando que $sD - uE$ puede escribirse en forma matricial como $\begin{pmatrix} D & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix}$, concluimos que $f(s,u)$ puede expresarse en la forma deseada eligiendo

$$\begin{array}{rcl} A & = & \begin{pmatrix} D & -E \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} D & -E \end{pmatrix} , \\ b & = & -2(P - Q)^t \begin{pmatrix} D & -E \end{pmatrix} , \text{ y} , \\ c & = & ||P - Q||^2 . \end{array}$$

Sigue que,

$$A = \begin{pmatrix} ||D||^2 & -\langle D, E\rangle \\ -\langle D, E\rangle & ||E||^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\langle D, E\rangle \\ -\langle D, E\rangle & 1 \end{pmatrix} ,$$

Como $\mathrm{Det}(A^{(1)}) = 1 > 0$ y $\mathrm{Det}(A^{(2)}) = 1 - (\langle D, E\rangle)^2 > 0$ sigue que A es definida positiva

(ii.2).- Observamos primero que $fs,u)$ es el cuadrado de la distancia entre $X(s)$ e $Y(u)$.

Luego, el mínimo de f definido en (ii.1), i.e., del cuadrado de la distancia entre $L_{P,D}$ y $L_{Q,E}$, es

$$f(x_0) = -x_0^t A x_0 + c , \quad \text{donde } x_0 = \frac{1}{2} A^{-1} b .$$

La conclusión deseada se obtiene dado que

$$\sqrt{-x_0^t A x_0 + c} = \sqrt{-\frac{1}{4}(A^{-1}b)^t A(A^{-1}b) + c} = \sqrt{c - \frac{1}{4} b^t (A^t)^{-1} b} = \sqrt{c - \frac{1}{4} b^t A^{-1} b} .$$