Pauta Examen 2da Fecha

ALGEBRA

Pregunta 1

1. (a) El vector x es $x = (y^T z^T)^T$. Claramente

$$A \cdot x = B \cdot y + R \cdot z.$$

Si $Ax = b$ entonces $B \cdot y + Rz = b$ y luego $By = b - Rz$. Como B es invertible se puede premultiplicar por B^{-1} obteniéndose:

$$y = B^{-1}(b - Rz).$$

(b) Si $x \in Ker(A) \Rightarrow Ax = 0$
Aplicando la parte (a) con $b = 0$ se tiene que

$$y = B^{-1}(0 - R \cdot z) = -B^{-1}Rz$$

y $z \in I\!R^k$ es cualquiera.
Al revés, si $x = ((-B^{-1}R \cdot z)^T, z^T)^T$, con $z \in I\!R^k$, entonces

$$\begin{aligned} A \cdot x = B \cdot (-B^{-1}R \cdot z) + R \cdot z &= -B \cdot B^{-1} \cdot R \cdot z + R \cdot z \\ &= -I \cdot R \cdot z + R \cdot z \\ &= -R \cdot z + R \cdot z = 0 \end{aligned}$$

Lo que implica que $x \in KerA$.

(c) El rango de A se define como:

$$\dim\ (Im(A)) = \text{ dim columnas de } A = \text{dim columnas de } A^T$$

Como A es de $m \times (m + k)$ y $k \geq 0$ entonces dim $Im(A) \leq m$. Pero como B es invertible, hay al menos n columnas ℓ.i. en A. Lo que implica que $rg(A) = m$. Usando el Teorema del núcleo imagen se deduce que

$$\begin{aligned} \dim(I\!R^{m+k}) = m + k &= \dim Im(A) + \dim Ker(A) \\ &= m + \dim Ker(A) \\ &\Rightarrow \dim Ker(A) = k \end{aligned}$$

Pregunta 2

Multiplicando se tiene:

$$\begin{bmatrix} 2+a+2b & 1+a+2b \\ 2c+a+2d & c+a+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

igualando término a término,

$$\begin{aligned} 2+a+2b &= 1 \\ 1+a+2b &= \alpha \\ 2c+a+2d &= 1 \\ c+a+2d &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a+2b &= -1 \\ a+2b &= \alpha-1 \\ a+2c+2d &= 1 \\ a+c+2d &= 1 \end{aligned}$$

Ahora formulemos el sistema lineal de manera matricial:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \alpha-1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Pivoteando

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

cambio filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{array}\right]$$

siguo el pivoteo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{array}\right]$$

Si $\alpha \neq 0 \Rightarrow$ El sistema no tiene solución
Si $\alpha = 0 \Rightarrow$ El sistema tiene solución:

$$-1 \cdot c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$2b - 2c - 2d = -2 \Rightarrow b = d - 1$$

$$\Rightarrow \quad a + 2b = -1 \Rightarrow \quad a = 1 - 2d$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2d \\ d-1 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pregunta 3

(a) Si A es diagonizable, existen una matriz P invertible y D diagonal tal que:

$$A = PDP^{-1}$$

Entonces,

$$A^k = PD^kP^{-1} = 0.$$

Como P es invertible

$$\begin{aligned} \Rightarrow P^{-1}A^k \cdot P = D^K &= P^{-1} \cdot 0 \cdot P \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D^k = 0 \Rightarrow D = 0$$

pues cada elemento de la diagonal D^k es 0.

$$\Rightarrow A = P \cdot 0 \cdot P^{-1} = 0$$

(b) El $det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 9 + 8 = \lambda^2 - 1$. Luego los valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. Los vectores propios asociados:

$$(A - \lambda_1 I)x = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow 2x - 4y = 0 \Rightarrow x = 2y \Rightarrow W_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(A - \lambda_2 I)x = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 4x - 4y = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow W_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Luego

$$\begin{aligned} A &= P \cdot D \cdot P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow A^{201} &= P\ D^{201} P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{201} & 0 \\ 0 & (-1)^{201} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{201} & 0 \\ 0 & (-1)^{201} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$