Pauta Examen MA11A Álgebra

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Semestre Primavera 2004

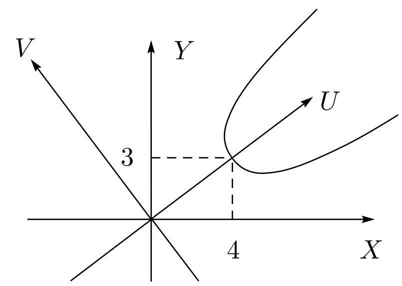
El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Esta se puede obtener en la página:
`http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA11A.html` en formato ps o pdf.

P1.- a) (4 ptos.) Identifique y dibuje la cónica

$$4x^2 + 4y^2 + 2xy - 2\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y - 7 = 0,$$

encontrando un cambio de variables que permita escribirla de manera centrada con respecto a ejes adecuados. Explicite todos los cambios de variables requeridos.

b) (2 ptos.) La cónica de la figura tiene ecuación $u = 5 + v^2$ donde u y v son variables en los ejes U y V. Encuentre la ecuación de la cónica anterior en las variables x, y (con respecto a los ejes X, Y de la figura).



Pauta.

a) La forma cuadrática en la ecuación de la cónica se puede escribir como

$$4x^2 + 4y^2 + 2xy = (x\, y)\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Definamos

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$\det\,(A - \lambda I) = 0$$
$$\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

y resolvemos

$$(4-\lambda)^2 - 1 = 0$$
$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 - 1 = 0$$
$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$$

$$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = 5 \text{ y } 3.$$

Vectores propios de A:

$$\lambda = 5 \quad A - 5I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{Ker}(A - 5I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\lambda = 3, A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{Ker}(A - 3I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Luego

$$A = PDP^t \quad \text{donde } P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Realicemos el cambio de variables

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{es decir} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}(x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (x,y)P\,D\,P^t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (u,v)D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= 5u^2 + 3v^2\end{aligned}$$

Tomando en cuenta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} u+v \\ u-v \end{pmatrix}$$

la ecuación de la cónica queda

$$\begin{aligned}5u^2 + 3v^2 - 2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v) - 8\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(u-v) - 7 &= 0 \\ 5u^2 + 3v^2 - 2u - 2v - 8u + 8v - 7 &= 0 \\ 5u^2 - 10u + 3v^2 + 6v - 7 &= 0 \\ 5(u^2 - 2u) + 3(v^2 + 2v) - 7 &= 0 \\ 5((u-1)^2 - 1) + 3((v+1)^2 - 1) - 7 &= 0 \\ 5(u-1)^2 - 5 + 3(v+1)^2 - 3 - 7 &= 0 \\ 5(u-1)^2 + 3(v+1)^2 &= 15 \\ \left(\frac{u-1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{v+1}{\sqrt{5}}\right) &= 1\end{aligned}$$

que es una elipse con semiejes $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$.

b) La matriz de rotación que cambia las coordenadas (u,v) a (x,y) viene dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

En efecto, el punto con coordenadas $(u,v) = (1,0)$ según la figura tiene coordenadas $(x,y) = (4,3)$ por lo que la primera columna de P debe ser $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}/5$ y el punto con coordenadas $(u,v) = (0,1)$ tiene coordenadas $(x,y) = (-3,4)$ por lo que la segunda columna de P viene dada por $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}/5$. Como P es ortonormal

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}(4x + 3y, -3x + 4y)$$

Reemplazando en la ecuación de la cónica $u = 5 + v^2$ obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}(4x+3y) &= 5 + \frac{1}{25}(-3x+4y)^2 \\ 5(4x+3y) &= 125 + (9x^2 - 24xy + 16y^2)\end{aligned}$$

$$\boxed{9x^2 + 16y^2 - 24xy - 20x - 15y + 125 = 0}$$

P2.- a) (1 pto.) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ simétricas. Demuestre que si A es definida positiva y B es semi-definida positiva entonces $A + B$ es definida positiva.

b) Considere $\{v_1, v_2\}$ un conjunto ortonormal de vectores columna en $\mathbb{R}^n$ y definamos la matriz V de $n \times 2$ cuyas columnas son v_1 y v_2, es decir $V = [v_1 v_2]$. Sea

$$A = I - aVV^t$$

donde a es un parámetro real, $a \neq 0$, e I es la matriz identidad de $n \times n$.

i) (0.5 ptos.) Pruebe la fórmula

$$VV^t x = \langle x, v_1 \rangle \, v_1 + \langle x, v_2 \rangle \, v_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

ii) (4 ptos.) Muestre que los valores propios de A son $\mathbf{1}$ y $(\mathbf{1} - \mathbf{a})$ y determine la dimensión del espacio propio asociado a cada uno de ellos. Justifique que A es diagonalizable.

iii) (0.5 ptos.) Encuentre los valores de $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, tales que A es definida positiva.

Pauta.

a) Recordemos que:

A definida positiva $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \quad \langle Ax, x \rangle > 0.$

B semi-definida positiva $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \langle Bx, x \rangle \geq 0.$

Sea $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$. Entonces

$$\langle (A + B)x, x \rangle = \langle Ax + Bx, x \rangle = \langle Ax, x \rangle + \langle Bx, x \rangle > 0.$$

b) i)

$$VV^t x = [v_1 \, v_2] \begin{bmatrix} v_1^t \\ v_2^t \end{bmatrix} x = v_1 \langle v_1, x \rangle + v_2 \langle v_2, x \rangle$$

ii) Primero tratamos de encontrar los vectores propios asociados al valor propio 1, es decir buscamos $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ tal que $Ax = x \Leftrightarrow x - a\, VV^t x = x$. Dado que $a \neq 0$ esta ecuación es equivalente a $VV^t x = 0$, por lo que debemos hallar $\operatorname{Ker} VV^t$.

Por la fórmula de la parte i), si $\langle x, v_1 \rangle = 0$ y $\langle x, v_2 \rangle = 0$ entonces $VV^t x = 0$.

Por otro lado,

$$VV^t v_1 = v_1 \neq 0$$
$$VV^t v_2 = v_2 \neq 0$$

De lo anterior concluimos que $\operatorname{Ker} VV^t = \{v_1, v_2\}^\perp$ que es un e.v. de dimensión $n - 2$.

Luego x es vector propio con valor propio 1 $\Leftrightarrow x \in \{v_1, v_2\}^\perp$, esto es $\operatorname{Ker}(A - I) = \{v_1, v_2\}^\perp$ y vemos que el subespacio propio asociado a 1 tiene dimensión $n - 2$.

Veamos cuáles son los vectores propios de A asociados al valor propio $1 - a$, es decir $x \in \mathbb{R}^n$ cumple

$$\begin{aligned} Ax = (1 - a)x &\Leftrightarrow x - aVV^t x = x - ax \\ &\Leftrightarrow VV^t x = x \quad (a \neq 0) \end{aligned}$$

Como $VV^tx = v_1\langle v_1, x\rangle + v_2\langle v_2, x\rangle$ vemos que

$$VV^tv_1 = v_1$$
$$VV^tv_2 = v_2$$

Esto nos dice que v_1, y v_2 están en el subespacio propio $\text{Ker}(A-(1-a)I)$, es decir $\langle\{v_1, v_2\}\rangle \subset \text{Ker}(A-(1-a)I)$. De hecho se tiene la igualdad de ambos subespacios. En efecto, la inclusión anterior nos dice que $\dim \text{Ker}(A-(1-a)I) \geq 2$. Por otro lado $\dim \text{Ker}(A-(1-a)I) \leq 2$, ya que esta dimensión más la dimensión de $\text{Ker}(A-I)$ no puede ser mayor que n. Luego $\dim \text{Ker}(A-(1-a)I) = 2$ y $\text{Ker}(A-(1-a)I) = \langle\{v_1, v_2\}\rangle$.

Observemos que A es diagonalizable porque es simétrica: $A^t = I - a(VV^t)^t = I - a\,VV^t = A$.

iii) Para $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ los valores propios de A son $1, 1-a$. A es definida positiva si y sólo si 1 y $(1-a)$ son positivos, es decir

$$1-a > 0 \Leftrightarrow a < 1.$$

P3.- Sea S_2 el espacio vectorial de las matrices simétricas de 2×2 con coeficientes reales. Dada $B \in S_2$ considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to S_2$ definida mediante

$$\forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \qquad T(x) = B \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} \cdot B.$$

a) (1 pto.) Verifique que $T(x)$ es simétrica para todo $x \in \mathbb{R}^4$.

b) (2 ptos.) Para $B \in S_2$ una matriz cualquiera, es decir, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, encuentre la matriz representante de T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y la base

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

de S_2.

c) (2 ptos.) Para $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ encuentre una base y la dimensión de $\text{Ker}(T)$. ¿Es T inyectiva?

Entregue una base y la dimensión de $\text{Im}(T)$. ¿Es T sobreyectiva?

d) (1 pto.) Sea $B \in S_2$ una matriz cualquiera. Pruebe que si B es invertible entonces T es sobreyectiva.

Pauta.

a)

$$\begin{aligned}
\left(T(x)^t = B\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} B\right)^t &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}^t B^t + B^t \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix}^t \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} B + B \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \\
&= T(x)
\end{aligned}$$

b) Encontremos la matriz representante de T con respecto a las bases canónica en $\mathbb{R}^4$ y la que se nos da en S_2:

$$
\begin{aligned}
T\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}a & 0\\ b & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a & b\\ b & 0\end{bmatrix}=2a\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\\
T\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}0 & a\\ 0 & b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ a & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & a\\ a & 2b\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+2b\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\
T\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}b & 0\\ c & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b & c\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2b & c\\ c & 0\end{bmatrix}=2b\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\\
T\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}0 & b\\ 0 & c\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ b & c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & b\\ b & 2c\end{bmatrix}=b\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+2c\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Luego la matriz representante de T viene dada por:

$$
A=\begin{bmatrix}2a & 0 & 2b & 0\\ b & a & c & b\\ 0 & 2b & 0 & 2c\end{bmatrix}
$$

c) En el caso $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ tenemos $a=b=1, c=0$ por lo que la matriz representante es

$$
A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 0\end{bmatrix}
$$

Encontremos $\operatorname{Ker} A$: escalonando

$$
\begin{array}{rrrr}2 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 0\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrrr}2 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 2 & -2\end{array}
$$

Resolviendo

$$
\begin{array}{ll}x_3=x_4 & x_2-x_3+x_4=0\Rightarrow x_2=0\\ x_1+x_3=0 & x_1=-x_3\end{array}
$$

y luego

$$
\operatorname{Ker} T=\left\langle\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{bmatrix}\right\rangle
$$

Además concluimos que $\dim \operatorname{Ker} T = 1$ y que T no es inyectiva.

Por el teorema del núcleo imagen

$$\dim \operatorname{Im} T + \underbrace{\dim \operatorname{Ker}}_{-1} T = \dim \mathbb{R}^4 = 4$$

y luego $\dim \operatorname{Im} T = 3$. Como $\operatorname{Im} T \subset S_2$ que tiene dimensión 3 obtenemos

$$\operatorname{Im} T = S_2.$$

Por lo tanto T es sobreyectiva y una base de $\operatorname{Im} T$ es la del enunciado.

d) Veamos que si B es invertible entonces A tiene rango completo. Escribamos

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

y recordemos la matriz representante A de T con las bases anteriores. Descomponemos A como se indica

$$A = \left[\underbrace{\begin{matrix} 2a & 0 & 2b \\ b & a & c \\ 0 & 2b & 0 \end{matrix}}_{\tilde{A}} \quad \begin{matrix} 0 \\ 2b \\ c \end{matrix} \right]$$

y observemos que

$$\det \tilde{A} = -2b(2ac - 2b^2) = -4\,b(ac - b^2)$$

Notemos que $\det B = ac - b^2 \neq 0$.

En el caso $b \neq 0$ tenemos que $\det \tilde{A} \neq 0$ por lo que el rango de $\tilde{A}$ es 3 lo cual implica que el rango de $A = 3$ es A. Vemos entonces que T es sobreyectiva.

En el caso $b = 0$ tenemos que

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2c \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

y del hecho que $\det B \neq 0$ vemos que $a \neq 0$, $c \neq 0$. Esto muestra que el rango de $A = 3$ ya que hay 3 columnas linealmente independientes.

Otra forma: Dado que B es simétrica se puede diagonalizar

$$B = PDP^t$$

donde P es ortonormal ($P^{-1} = P^t$) y D es diagonal.

Veremos que T es sobreyectiva por definición. Para esto sea $A \in S_2$ y tratemos de resolver $T(x) = A$. Escribiendo

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

vemos que debemos encontrar X tal que

$$\begin{aligned} & BX + X^t B = A \\ \iff \quad & PDP^t X + X^t PDP^t = A \\ \iff \quad & DP^t XP + P^t X^t PD = P^t AP \end{aligned}$$

Definamos

$$Y = P^t XP$$
$$\tilde{A} = P^t AP$$

donde Y es nuestra nueva incógnita y $\tilde{A}$ es una matriz simétrica. De este mode la ecuación que debemos resolver es

$$DY + Y^t D = \tilde{A}$$

Escribamos

$$D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}$$

y calculemos

$$DY = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ay_1 & ay_2 \\ by_3 & by_4 \end{bmatrix}$$

$$DY + Y^t D = \begin{bmatrix} 2ay_1 & ay_2 + by_3 \\ ay_2 + by_3 & 2by_4 \end{bmatrix}.$$

Luego ecuación que debemos resolver queda

$$\begin{bmatrix} 2ay_1 & ay_2 + by_3 \\ ay_2 + by_3 & 2by_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{bmatrix}$$

Los valores propios de B son a, b y como esta matriz es invertible deducimos que $a \neq, b \neq 0$. Es directo ver entonces que existe una solución: $y_1 = \frac{\tilde{a}_{11}}{2a}$ $y_2 = \frac{\tilde{a}_{12}}{a}$, $y_3 = 0$, $y_4 = \frac{\tilde{a}_{22}}{2b}$.