Pauta Examen MA11A Álgebra

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.
Semestre Primavera 2005

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio.

Pregunta 1. Denotemos por $M_{2,2}$ el espacio vectorial de las matrices de 2×2 con coeficientes reales.
Definimos la transformación lineal $T : M_{2,2} \to M_{2,2}$ mediante

$$T \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

y utilizamos la notación $id : M_{2,2} \to M_{2,2}$ para la función identidad

$$id \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

a) (1 pto.) Encuentre la matriz representante de T con respecto a la base canónica de $M_{2,2}$ en el dominio y el recorrido.

b) (1,5 ptos.) Encuentre una base $\mathcal{B}_+$ de $Ker(T + id)$ y dé la dimensión de $Im(T + id)$.

c) (1,5 ptos.) Encuentre una base $\mathcal{B}_-$ de $Ker(T - id)$ y dé la dimensión de $Im(T - id)$.

d) (1 pto.) Verifique que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_+ \cup \mathcal{B}_-$ es base de $M_{2,2}$.

e) (1 pto.) Dé la matriz representante de T con respecto a la base $\mathcal{B}$ en el dominio y el recorrido.

Pauta.

a) La base canónica de $M_{2,2}$ es

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(aunque el orden puede cambiar). Se tiene

$$\begin{aligned} TB_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B_4 \\ TB_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -B_2 \\ TB_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -B_3 \\ TB_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B_1. \end{aligned}$$

Con esto, la matriz representante de T con respecto a la base canónica en el dominio y recorrido es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Debemos resolver $(T+id)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 0$. Pero

$$(T+id)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d+a & 0 \\ 0 & a+d \end{bmatrix}.$$

Luego tenemos sólo la ecuación $a+d=0$, sin restricciones sobre b, c. Luego $Ker(T+id)$ está generado por

$$\mathcal{B}_+ = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Estas matrices son claramente l.i. y así $Ker(T+id)$ tiene dimensión 3. Por el teorema núcleo imagen la dimensión de $Im(T+id)$ es $4-3=1$.

c) Debemos resolver $(T-id)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 0$. Pero

$$(T-id)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d-a & -2b \\ -2c & a-d \end{bmatrix}.$$

Luego tenemos las ecuaciones $a-d=0$, $b=0$, $c=0$. Por lo tanto $Ker(T-id)$ está generado por

$$\mathcal{B}_- = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

y $Ker(T-id)$ tiene dimensión 1. Por el teorema núcleo imagen la dimensión de $Im(T-id)$ es $4-1=3$.

d) Tenemos que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_+ \cup \mathcal{B}_-$ es el conjunto de matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para verificar que son l.i. supongamos que $\alpha_1, \ldots, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ son tales que $\sum_{i=1}^4 \alpha_i A_i$. De inmediato obtenemos $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ y además $\alpha_1 + \alpha_4 = 0$, $\alpha_1 - \alpha_4 = 0$. Estas dos ecuaciones implican $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$.

(Otra forma mucho más económica de argumentar consiste en decir que las matrices de $\mathcal{B}_+$ y $\mathcal{B}_-$ son vectores propios de T asociados a valores propios distintos).

e) Como

$$TA_1 = -A_1, \quad TA_2 = -A_2, \quad TA_3 = -A_3, \quad TA_4 = A_4,$$

la matriz representante de T con respecto a la base $\mathcal{B}$ en el dominio y recorrido es

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pauta.

a)
- 0,2 saber la base canónica de $M_{2,2}$ (los cambios de orden se consideran buenos)
- 0,6 saber construir la matriz representante
- 0,2 resultado

b)
- 0,2 plantear el sistema de ecuaciones
- 0,8 encontrar una base del espacio solución

- 0,2 decir algo sobre independencia lineal (basta que se diga “son claramente l.i.”)
- 0,3 dimensión de la imagen

c)
- 0,2 plantear el sistema de ecuaciones
- 0,8 encontrar una base del espacio solución
- 0,2 decir algo sobre independencia lineal (basta que se diga “son claramente l.i.”)
- 0,3 dimensión de la imagen

d)
- 0,2 saber qué significa independencia lineal
- 0,8 argumento

e)
- 0,4 saber construir la matriz representante
- 0,6 resultado

Pregunta 2.

a) (1 pto.) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Pruebe por inducción que

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix} \qquad \forall n \geq 1.$$

b) (3 ptos.) Considere

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre P invertible y J en forma de Jordan tal que $A = PJP^{-1}$.

c) (2 ptos.) Para la matriz A de la parte anterior y $n \geq 1$ cualquiera calcule A^n explícitamente, encontrando expresiones para los coeficientes de A^n en función de n.

Pauta.

a) La fórmula es correcta para $n = 1$ ya que ambos lados se reducen a $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

Supongamos que la fórmula es correcta para n. Entonces

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^{n+1} &= \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda^{n+1} & \lambda^n + n\lambda^{n-1} \cdot \lambda \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^n \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b) Para encontrar la forma de Jordan de A, comenzamos por encontrar sus valores propios. Como A es triangular superior se deduce directamente que sus valores propios son 4 con multiplicidad algebraica (m.a.) igual a 2 y 2 con (m.a. = 1).

Encontremos los vectores propios asociados a 4 y 2.

<u>Vectores propios asociados a 4.</u> Tenemos

$$A - 4I = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

y al resolver $(A-4I)x=0$, $x=[x_1,x_2,x_3]^t$ encontramos las ecuaciones

$$x_3=0, \quad -2x_2-3x_3=0,$$

de las cuales se deduce $x_2=x_3=0$. x_1 queda libre y deducimos que $Ker(A-4I)$ está generado por el vector $v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$. Luego la multiplicidad geométrica del valor propio 4 es 1, y por lo tanto A no es diagonalizable. Un manera de encontrar su forma de Jordan consiste en buscar una solución w de $(A-4I)x=v_1$. Para resolver esta ecuación consideramos la matriz aumentada

$$\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\end{array}$$

Escribiendo $x=[x_1,x_2,x_3]^t$ vemos que $(A-4I)x=v_1$ es equivalente

$$x_3=0, \quad -2x_2-3x_3=1$$

es decir $x_2=-\frac{1}{2}$. Notemos que x_1 queda libre lo que corresponde al hecho que v_1 es vector propio de A. Sólo necesitamos una solución y la elegimos con $x_1=0$. Conseguimos así $w=\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}$.

<u>Vectores propios asociados a 2.</u> Tenemos

$$A-2I=\begin{bmatrix}2 & -2 & -3\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

y al resolver $(A-2I)x=0$, $x=[x_1,x_2,x_3]^t$ encontramos las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_2+x_3=1 \Longleftrightarrow &\qquad x_2=-\frac{1}{2}x_3\\ 2x_1-2x_2-3x_3=0 \Longleftrightarrow &\qquad x_1=x_2+\frac{3}{2}x_3=x_3.\end{aligned}$$

Encontramos así el vector propio $v_2\begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$.

Definiendo la matriz P cuyas columnas con v_1, w, v_2, es decir

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

y

$$J=\begin{bmatrix}4 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

tenemos que $A=PJP^{-1}$.

c) Notemos que $A^n=(PDJP^{-1})^n=PJ^nP^{-1}$. Luego una forma de encontrar A^n es calculando P^{-1} y luego el producto anterior.

<u>Cálculo de P^{-1}.</u> Escribimos la matriz P aumentada por al identidad y luego escalonamos

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array} \quad (\text{fila } 2\cdot(-2)) \longrightarrow \quad \begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array} \quad \begin{array}{l}(\text{fila 1 - fila 3})\\(\text{fila 1 - fila 3})\\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

y obtenemos

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por la parte a) de este problema obtenemos

$$J^n = \begin{bmatrix} 4^n & n4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

<u>Cálculo de $A^n = PJ^nP^{-1}$.</u>

$$\begin{aligned} PJ^n &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^n & n4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4^n & n4^{n-1} & 2^n \\ 0 & -\frac{1}{2}4^n & -2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^n &= PJ^nP^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^n & -2n4^{n-1} & 4^n - n4^{n-1} \\ 0 & -24^n & -4^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4^n & -2n4^{n-1} & -4^n - n4^{n-1} + 2^n \\ 0 & 4^n & \frac{1}{2}4^n - 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Empezando por el otro producto :

$$\begin{aligned} J^nP^{-1} &= \begin{bmatrix} 4^n & n4^{n-1} & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4^n & -2n4^{n-1} & -4^n - n4^{n-1} \\ 0 & -2 \cdot 4^n & -4^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Puntaje.

a)
- 0,1 por el caso $n = 0$ o $n = 1$ (basta decir algo)
- 0,9 por el paso inductivo

b)
- 0,2 valores propios (basta por inspección)
- 0,7 vector propio asociado a 4
- 0,7 vector propio generalizado asociado a 4 y el vector propio anterior
- 0,7 vector propios asociado a 2
- 0,7 matriz P y J

c) Est e puntaje es para quien haya intentado calcular A^n utilizando su forma de Jordan (es posible tratar de calcular A^2, A^3 inferir una forma general para A^n y después demostrarla por inducción)

- 0,5 saber que $A^n = PJ^nP^{-1}$
- 0,5 cálculo de J^n a partir de la primera parte
- 0,5 cálculo de P^{-1}
- 0,5 multiplicación de matrices

Pregunta 3.

a) (4,5 ptos.) Considere la cónica de ecuación

$$-2x^2 - 12xy + 7y^2 + \frac{40}{\sqrt{5}}x - \frac{30}{\sqrt{5}}y = 0.$$

Realice cambios de variables que permitan expresar la cónica de manera centrada con respecto a ejes adecuados e identifique la cónica. Sea explícito con los cambios de variable y bosqueje la cónica.

b) (1,5 ptos.) Sea M una matriz de $n \times n$ con coeficientes reales, simétrica y definida positiva. Considere la forma cuadrática

$$Q(x) = x^tMx, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Pruebe que si A es una matriz de $n \times n$ tal que $Q(Ax) = Q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ entonces A es invertible y $Q(A^{-1}x) = Q(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Ind.: considere el núcleo (o Ker) de A.

Pauta.

a) La parte cuadrática en la ecuación de la cónica se puede escribir como

$$-2x^2 - 12xy + 7y^2 = [x\ y]\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Definamos

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$$

y calculemos sus valores propios:

$$det(A - \lambda I) = det\begin{bmatrix} -2-\lambda & -6 \\ -6 & 7-\lambda \end{bmatrix} = (-2-\lambda)(7-\lambda) - 36$$
$$= -14 - 5\lambda + \lambda^2 - 36 = \lambda^2 - 5\lambda - 50.$$

Resolvemos $det(A - \lambda I) = 0$ obteniendo los valores propios

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 200}}{2} = \frac{5 \pm 15}{2} = 10, -5.$$

Calculamos ahora los vectores propios de A.

<u>Valor propio $\lambda = 10$:</u>

$$A - 10I = \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$$

Como sabemos que A es no invertible sólo tenemos la ecuación

$$-6x_1 - 3x_2 = 0 \Longleftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2}x_2$$

y luego $Ker(A-10I)=\left\langle\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\rangle$.

<u>Valor propio $\lambda=-5$:</u>

$$A-(-5)I=\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$$

y tenemos la ecuación:

$$3x_1-6x_2=0 \Longleftrightarrow x_1=2x_2.$$

Encontramos así $Ker(A-3I)=\left\langle\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\rangle$. Definiendo P como la matriz cuyas columnas son los vectores propios encontrado anteriormente (debidamente normalizados), esto es

$$P=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

obtenemos

$$A=PDP^t \quad \text{donde } D=\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Haciendo el cambio de variables

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=P^t\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

tenemos

$$[x\ y]\ A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\left(P^t\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)^t DP^t\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=[u\ v]\ D\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=10u^2-5v^2.$$

Para transformar el resto de la cónica notamos que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -u+2v \\ 2u+v \end{bmatrix}.$$

De este modo

$$\begin{aligned}\frac{40}{\sqrt{5}}x-\frac{30}{\sqrt{5}}y&=\frac{40}{\sqrt{5}}\frac{-u+2v}{\sqrt{5}}-\frac{30}{\sqrt{5}}\frac{2u+v}{\sqrt{5}}\\ &=8(-u+2v)-6(2u+v)=-20u+10v.\end{aligned}$$

Con esto la ecuación de la cónica queda

$$\begin{aligned}&10u^2-5v^2-20u+10v=0\\ \Longleftrightarrow&10(u^2-2u+1)-10-5(v^2-2v+1)+5=0\\ \Longleftrightarrow&10(u-1)^2-5(v-1)^2=5\\ \Longleftrightarrow&2(u-1)^2-(v-1)^2=1\\ \Longleftrightarrow&\frac{(u-1)^2}{\frac{1}{2}}-(v-1)^2=1\end{aligned}$$

que es una hipérbola.

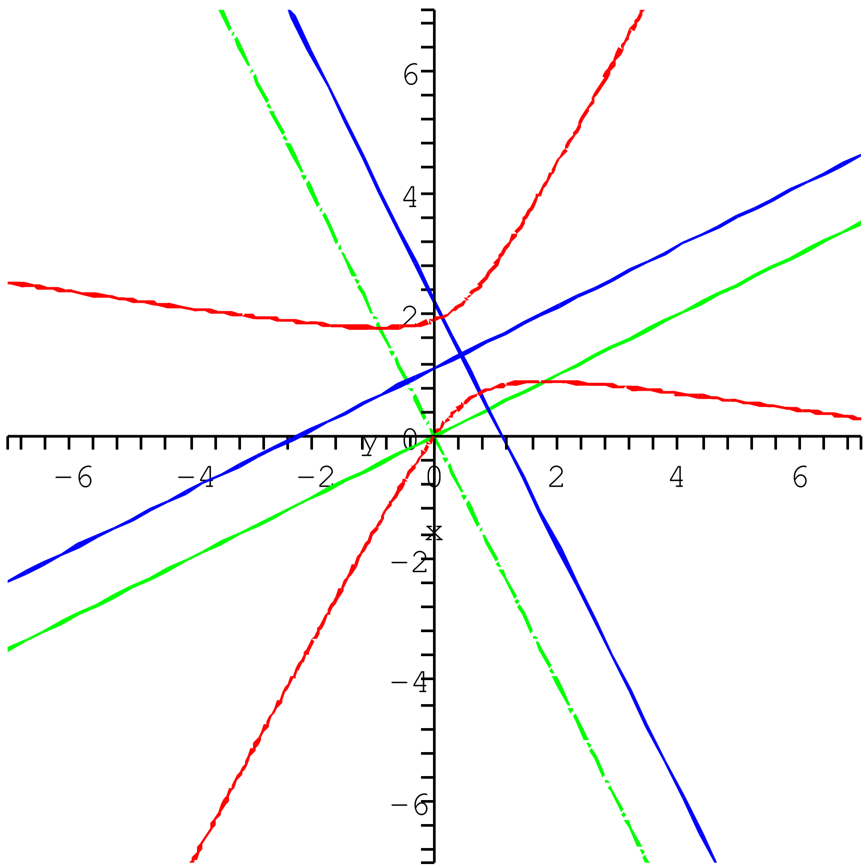
Nota: lo siguiente no es parte de la pregunta y se incluye sólo por referencia. Los ejes de simetría de la cónica tienen ecuaciones $u=1$ y $v=1$. Notamos que

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=P^t\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -x+2y \\ 2x+y \end{bmatrix}.$$

Luego en las variables x, y los ejes de simetría vienen dados por

$$u = 1 \iff 1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x + 2y) \iff y = \frac{\sqrt{5} + x}{2}$$
$$v = 1 \iff 1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x + y) \iff y = \sqrt{5} - 2x.$$

En la figura siguiente se muestra los ejes rotados sin traslación (verde) y los ejes de simetría (que es lo mismo que los ejes rotados y trasladados, en azul).



.

b) Probemos que A es invertible verificando que $Ker(A) = \{0\}$. En efecto, si $Ax = 0$ entonces

$$x^t M x = Q(x) = Q(Ax) = (Ax)^t M A x = 0.$$

Pero M es simétrica definida positiva, lo que implica que $x = 0$.

Como $Q(Ax) = Q(x)$ para todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ escribiendo $y = Ax \iff x = A^{-1}y$ vemos que $Q(y) = Q(A^{-1}y)$ y todo $y \in \mathbb{R}^n$ se obtiene como $y = Ax$ para algún x (con $x = A^{-1}y$).

Puntaje.

a)
- 0,3 reconocer la parte cuadrática de la cónica (encontrar A)

- 0,6 valores propios de A
- 0,8 vector propio asociado a 10
- 0,8 vector propio asociado a -5
- 0,5 matriz P de cambio de coordenadas (lo que incluye la normalización)
- 1 transformación de la ecuación de la cónica a las variables u, v
- 0,5 bosquejo (basta que sea aproximado, pero debe observarse que se trata de una hipérbola y que los ejes son los vectores propios, trasladado o no)

b)
- 0,9 $Q(Ax) = Q(x)\ \forall x \Longrightarrow A$ invertible
- 0,6 $Q(A^{-1}x) = Q(x)\ \forall x$