Pauta Examen MA11A ALGEBRA
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
24 de Noviembre de 2006

Pauta Problema 1

Sea $p \in \mathbb{R}$ y considere la ecuación: $x^2 + y^2 + 2xy(1-2p) = p$ Determine, cuando existan, los valores del parámetro p para los cuales la ecuación representa: Circunferencia; Elipse, Recta o rectas; Parábola; Hipérbola; Conjunto vacío, un punto.

Señale explícitamente que cónicas o conjuntos de los indicados no pueden ser representados por la ecuación dada para ningún valor de p en $\mathbb{R}$.

Solución:

La ecuación en su forma cuadrática es

$$p = x^2 + y^2 + 2xy(1-2p) = (x,y)\begin{pmatrix} 1 & 1-2p \\ 1-2p & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Veamos los valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1-2p \\ 1-2p & 1 \end{pmatrix}$. El polinomio característico de A es $p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-2p \\ 1-2p & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 - (1-2p)^2 = 0 \Rightarrow 1-\lambda = \pm(1-2p) \Rightarrow \lambda = 1 \mp (1-2p)$

De donde $\lambda_1 = 2p; \lambda_2 = 2-2p = 2(1-p)$.

(1.0 pto.)

Si $\lambda_1 = \lambda_2, 2p = 2-2p \Rightarrow p = 1/2$ y en tal caso la ecuación queda $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ que es una $\odot$ centro $0(0,0)$ y $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(0.5 ptos.)

Para el caso $p \neq 1/2$, para el vector propio $\lambda_1 = 2p$ el vector propio asociado $v_1 = \binom{x}{y}$ debe cumplir

$$\begin{pmatrix} 1-2p & 1-2p \\ 1-2p & 1-2p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ de donde } x+y=0 \text{ o } x=-y$$

de donde un vector propio (unitario) es $v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Para $\lambda_2 = 2-2p$ se tiene

$$\begin{pmatrix} -1+2p & 1-2p \\ 1-2p & -1+2p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -(1-2p) & 1-2p \\ 1-2p & -(1-2p) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde $-x+y=0$ y así $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. (1.0 pto.)

Observación: También puede argumentarse que el vector propio asociado a λ_2 es ortogonal (unitario) a v_1 de donde $v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Sigue que la matriz A puede escribirse como $A = PDP^t$ con $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ y $P = (v_1, v_2)$ así

$$A = PDP^t = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2p & 0 \\ 0 & 1-2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

y considerando el cambio de variables

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}x & +\frac{1}{\sqrt{2}}y \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x & +\frac{1}{\sqrt{2}}y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} -x+y = \sqrt{2}u \\ x+y = \sqrt{2}v \end{array}$$

de donde $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(v-u); y = \frac{\sqrt{2}}{2}(v+u)$

Así, la ecuación queda $\frac{1}{2}(v-u)^2 + \frac{1}{2}(v+u)^2 + (v^2 - u^2)(1-2p) = p$.

(1.0 pto.)

Agrupando $2pu^2 + 2(1-p)v^2 = p$.

Entonces: Si $p = 0 \Rightarrow v^2 = 0 \Rightarrow v = 0$ que es una recta que en las variables originales corresponde a $y - x$.

Si $p = 1 \Rightarrow u^2 = 1/2 \Rightarrow u = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ que son rectas paralelas correspondientes a $y = x+1 \wedge y = x-1$.

(1.0 pto.)

Si $p \in (0,1)$ con $p \neq 1/2$ la ecuación representa elipses. Si $p \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ la ecuación representa hipérbolas.

(1.0 pto.)

Con este análisis p recorre $\mathbb{R}$, de modo que no existen valores de p que transformen la ecuación original en parábola, en un punto, o el conjunto vacío.

(0.5 ptos.)

Pauta Pregunta 2

Sea $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ definida por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

i) Demuestre que el polinomio característico de A es $p(\lambda) = -\lambda(\lambda - 3)^2$.

ii) Encuentre matrices P y D de modo que $P^t = P^{-1}$ y D diagonal tal que $A = PDP^t$

iii) Es A invertible?. Calcule bases y dimensiones para el nucleo y la imagen de A, es decir de la transformación $T(x) = Ax$.

iv) Determine los valores propios de $I + A$, para lo cual pruebe que $A + I = P(D + I)P^t$.
Estudie si $I + A$ es definida positiva. Justifique.

Solución

i) El polinomio característico de A es $p(\lambda) = |A - \lambda I|$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((2-\lambda)^2) - 1) + 1(-1(2-\lambda) - 1) - (1 + 2 - \lambda) \\
&= (2-\lambda)^3 - 2 + \lambda - 2 + \lambda - 1 - 3 + \lambda \\
&= (2-\lambda)^3 + 3\lambda - 8 = (8 - 12\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3) + 3\lambda - 8 \\
&= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 9) \\
&= -\lambda(\lambda - 3)^2
\end{aligned}$$

(1.0 pto.)

ii) A es simétrica y por lo tanto diagonizable y podemos escribir $A = PDP^t$ donde $P = (v_1, v_2, v_3)$ en que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortonormal de vectores propios de A y D es la matriz diagonal de los correspondientes valores propios.

Del polinomio característico, los valores propios son $\lambda = 3$ y $\lambda = 0$. Para calcular el espacio propio W_3 asociado a $\lambda = 3$ tenemos

$$(A - 3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y + z = 0$$

Así, $W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \right\}$. Por lo tanto una base de vectores propios para W_3 puede ser $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \{u_1, u_2\}$ (0.5 ptos.)

y la base ortonormal asociada, aplicando Gram-Schmidt será:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\tilde{v}_2 &= u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\tilde{v}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ con } \|\tilde{v}_2\| = \frac{1}{2}\sqrt{6}
\end{aligned}
$$

Entonces $v_2 = \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(0.5 ptos.)

Así, una base ortonormal para W_3 será $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$

Para el espacio asociado a $\lambda = 0$ se tendrá

$$
\begin{aligned}
(A - 0I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2x - y - x = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z \end{matrix} \\
&\Rightarrow \quad x = y = z
\end{aligned}
$$

Así el espacio propio $W_0 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\right\}$ y una base puede ser $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} =$ $\{u_3\}$ (0.5 pto.s)

en que u_3 es ortogonal a v_1 y v_2 anteriores, de modo que, normalizando u_3 obtenemos $v_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y completamos la base ortonormal de vectores propios de $A, \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Sigue que $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ y $P^t = P^{-1}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(0.5 ptos.)

- iii) Recordar que A es invertible ssi $|A| \neq 0$ y en este caso $|A| = |PDP^{-1}| = |D|$ con $|D| = \prod_{i=1}^{3} \lambda_i = 3 \cdot 3 \cdot 0 = 0$. Entonces A NO ES INVERTIBLE.

(0,.5 ptos.)

Una base para el núcleo de A o $Ker(T)$. Sea $u \in Ker(T)$, entonces $T(u) = 0$ con $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Entonces $T(u) = Au = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ que fue resuelto en (ii) concluyendose que $Ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x = y = z \right\}$ de modo que una base para $Ker(T)$ será $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $Dim(Ker(T)) = 1$.

(0.7 ptos.)

Para determinar una base para $Im(A)$, escribimos

$$T(u) = A(u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -x + 2y - z \\ x - y + 2z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

en donde cualquier par de los vectores de la derecha son $\ell.i$ y el tercero ℓd de los otros dos. Así, una base de ImA puede ser $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ y $Dim(ImA) = 2$.

(0.8 ptos.)

OTRA FORMA

También es base de $Im(A)$ la formada por los vectores propios asociados a los valores propios no nulos. En este caso

$$Im(A) = \langle \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{Base}} \right\} \rangle$$

OTRA FORMA Escalonando A

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se deduce que las dos primeras columnas de A son $\ell.i$ y constituyen base. Entonces

$$Im(A) = \langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \rangle$$

iv) Como A es simétrica, es diagonalizable y $A = PDP^t$.

Así $A + I = PDP^t + PP^{-1} = PDP^t + PIP^{-1} = PDP^t + PIP^t$

$A + I = P(D + I)P^t$.

(0.5 ptos.)

Entonces $A+I$ es diagonalizable con $D+I$ matriz diagonal asociada y $D+I = \begin{pmatrix} 3 & & 0 \\ & 3 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} +$

$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & & 0 \\ & 4 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ de modo que los valores propios de $A + I$ son 4 y 1

$A + I$ es definida positiva pues sus valores propios $4, 4, 1$ son positivos.

(0.5 ptos.)

Pauta Problema 3

i) Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica e invertible.

Demuestre que A^2 es simétrica definida positiva.

ii) Sean $P, Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrices ortogonales (recuerde que A invertible se dice ortogonal si y solo si $A^{-1} = A^t$). Demuestre que PQ es ortogonal.

iii) Demuestre que $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es ortogonal si y solo si

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \langle Px, Py\rangle = \langle x, y\rangle.$

Solución

i) A^2 es simétrica.

Recordar que una matriz simétrica es igual a su transpuesta. Entonces $(A^2)^t = (AA)^t = A^tA^t = (A^t)^2$ pero $A^t = A$.

Sigue que $(A^2)^t = A^2$, es decir A^2 es simétrica.

(0.5 ptos.)

Además, A es simétrica y entonces diagonalizable y podemos escribirla como $A = PDP^t$ donde $P = (v_1, v_2, v_3)$ y $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base ortonormal de vectores propios de A y D es la matriz diagonal de los valores propios.

Entonces $A^2 = AA = (PDP^t)(PDP^t) = (PD)(P^tP)(DP^t)$ donde $P^t = P^{-1}$.

Así $A^2 = PDIDP^t = PD^2P^t$. (1.0 pto.)

De modo que la diagonalización de A^2 indica que D^2 contiene sus valores propios. También, como A es invertible, $|A| \neq 0$ pero $|A| = |D|$. Así $|D| \neq 0 \Rightarrow \lambda_i \neq 0\ \forall i$ (valores propios no nulos)

Como los valores propios de A^2 en D^2 son $\lambda_i^2\ \forall i$ y $\lambda_i^2 > 0\ \forall i$.

Concluimos que los valores propios de A^2 son todos positivos.

(1.0 pto.)

Sigue que A^2 es definida positiva.

ii) PQ es ortogonal si $(PQ)^{-1} = (PQ)^t$. En efecto, $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$ (Propiedad de inversión) Además, P y Q son ortogonales, entonces $P^{-1} = P^t$ y $Q^{-1} = Q^t$. Sigue que $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1} = Q^tP^t = (PQ)^t$ (Prop. de Transp)

(1.0 pto.)

iii) Sea P ortogonal, entonces $P^{-1} = P^t$ (P invertible)

$(\Rightarrow)\langle Px, Py\rangle = (Px)^tPy = x^tP^tPy = x^tP^{-1}Py = x^tIy$. Así $\langle Px, Py\rangle = \langle x, y\rangle$

(1.0 pto.)

$(\Leftarrow)$ Sabemos que $\langle Px, Py\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Entonces $x^tP^tPy = x^ty = x^tIy \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \quad x^t P^t P y - x^t I y = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Entonces $x^t(P^t P - I)y = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (0.5 ptos.)

o bien $x^t A y = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ con $A = P^t P - I$

También $x^t A y = 0 \Rightarrow \langle x, Ay \rangle = 0 \quad \forall x, y$.

Pero se sabe que si $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ es la base canónica en $\mathbb{R}^n$ y $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ podemos escribir

$$\langle x, Ay \rangle = 0 \Rightarrow \langle e_i, Ae_j \rangle = A_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

Es decir $A = 0$ entonces $P^t P - I = 0$ o bien $P^t P = I$. Sigue que $P^t = P^{-1}$. Concluyendose que P es ortogonal. (1.0 pto.)