Pauta Examen de 2ª fecha MA11A Álgebra

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.
Semestre Primavera 2004

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Esta se puede obtener en la página:
`http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA11A.html` en formato ps o pdf.

P1.- Definamos $\mathcal{P}_k$ como el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que k. Considere las transformaciones $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ y $S : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ definidas mediante

$$T[p](x) = (x^2 + 1)p'(x) + p(x) + p'(0)x \qquad \forall p \in \mathcal{P}_2$$

donde $p'(x) = \frac{dp}{dx}(x)$ es la derivada de $p(x)$, y

$$q \in \mathcal{P}_3,\ q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \qquad \Longrightarrow \qquad S[q](x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

a) (1 pto.) Pruebe que T y S son lineales.

b) (1.5 ptos.) Determine si T es sobreyectiva o inyectiva, y haga lo mismo para S.

c) (2 ptos.) Encuentre bases de $\mathrm{Im}(S \circ T)$ y $\mathrm{Ker}(S \circ T)$.

d) (1.5 ptos.) Encuentre la matriz representante de $S \circ T$ con respecto a la base $\beta = \{1, 1 + x, 1 + x^2\}$ tanto en el espacio de partida como en el de llegada.

Pauta.

a)

$$\begin{aligned}
T[p + \lambda q](x) &= (x^2 + 1)(p + \lambda q)'(x) + (p + \lambda q)(x) + (p + \lambda q)'(0) \\
&= (x^2 + 1)(p'(x) + \lambda q'(x)) + p(x) + p'(0)x + \lambda q(x) + \lambda q'(0)x \\
&= (x^2 + 1)p'(x) + p(x) + p'(0)x + \lambda\Big((x^2 + 1)q'(x)) + q(x) + q'(0)x\Big) \\
&= T[p](x) + \lambda T[q](x)
\end{aligned}$$

$\boxed{0.5}$

Sean $p, q \in \mathcal{P}_4$ y escribamos

$$\begin{aligned}
p(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\
q(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3.
\end{aligned}$$

Entonces

$$(p + \lambda q)(x) = a_0 + \lambda b_0 + (a_1 + \lambda b_1)x + (a_2 + \lambda b_2)x^2 + (a_3 + \lambda b_3)x^3$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
S[p + \lambda q](x) &= a_0 + \lambda b_0 + (a_1 + \lambda b_1)x + (a_2 + \lambda b_2)x^2 \\
&= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \lambda(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) \\
&= S[p](x) + \lambda S[q](x).
\end{aligned}$$

$\boxed{0.5}$

b) S es sobreyectiva ya que dado cualquier $q \in \mathcal{P}_3$ se tiene $q \in \mathcal{P}_4$ y $S(q) = q$. $\boxed{0.2}$

Por el teorema núcleo-imagen

$$\dim \mathrm{Ker}\, S + \dim \mathrm{Im}\, S = 4$$

y como $\dim \operatorname{Im} S = 3$ se deduce que $\dim \operatorname{Ker} S = 1$ por lo que S no es inyectiva. $\boxed{0.2}$

Por el teorema núcleo-imagen

$$\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = 3$$

lo que implica que $\dim \operatorname{Im} T \leq 3$. Como $\operatorname{Im} T \subset \mathcal{P}_4$ que tiene dimensión 4 deducimos que T no es sobreyectiva. $\boxed{0.2}$

Para determinar si T es inyectiva o no calculemos para $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

$$\begin{aligned}
T[p](x) &= (x^2+1)p'(x) + p(x) + p'(0)x \\
&= (x^2+1)(a_1 + 2a_2x) + a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_1x \\
&= a_1x^2 + 2a_2x^3 + a_1 + 2a_2x + a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_1x \\
&= a_0 + a_1 + (2a_1 + 2a_2)x + (a_1 + a_2)x^2 + 2a_2x^3.
\end{aligned}$$

$\boxed{0.6}$

Si $T(p) = 0$ tendríamos

$$a_0 + a_1 = 0, \qquad a_1 + a_2, \qquad a_2 = 0$$

y observamos que necesariamente $a_1 = 0$, $a_0 = 0$. Luego $p(x) = 0$ por lo que T es inyectiva. $\boxed{0.3}$

c) Primero calculemos $S \circ T(p)$. Escribamos $p \in \mathcal{P}_3$ como $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Por lo anterior

$$T[p](x) = a_0 + a_1 + (2a_1 + 2a_2)x + (a_1 + a_2)x^2 + 2a_2x^3$$

y por lo tanto

$$S \circ T[p](x) = a_0 + a_1 + (2a_1 + 2a_2)x + (a_1 + a_2)x^2.$$

$\boxed{0.3}$

Para encontrar $\operatorname{Im}(S \circ T)$ y $\operatorname{Ker}(S \circ T)$ es conveniente utilizar la matriz representante de $S \circ T$ con respecto a la base canónica de $\mathcal{P}_3$: $\{1, x, x^2\}$. Calculamos

$$\begin{aligned}
S \circ T[1] &= 1 \\
S \circ T[x] &= 1 + 2x + x^2 \\
S \circ T[x^2] &= 2x + x^2.
\end{aligned}$$

$\boxed{0.6}$

Luego la matriz representante es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{0.3}$

Para buscar el núcleo de $S \circ T$ escalonamos

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Escribiendo las coordenadas como a_0, a_1, a_2 tenemos las ecuaciones

$$2a_1 + 2a_2 = 0, \qquad a_0 + a_1 = 0,$$

es decir

$$a_0 = -a_1, \qquad a_0 = a_2$$

por lo que

$$\mathrm{Ker}(S \circ T) = \langle 1 - x + x^2 \rangle.$$

$\boxed{0.3}$

Para encontrar la imagen de $S \circ T$ notemos que A tiene dos columnas linealmente independientes (la primera y tercera)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ya que la segunda es la suma de estas. Por esto

$$\mathrm{Im}(S \circ T) = \langle 1, 2x + x^2 \rangle.$$

$\boxed{0.5}$

d) Calculemos

$$\begin{aligned} S \circ T[1] &= 1 \\ S \circ T[1+x] &= 2 + 2x + x^2 \\ S \circ T[1+x^2] &= 1 + 2x + x^2. \end{aligned}$$

$\boxed{0.6}$

Hay que escribir estos vectores en la base $\beta = \{1, 1+x, 1+x^2\}$:

$$\begin{aligned} 2 + 2x + x^2 &= -1 + 2(1+x) + (1+x^2) \\ 1 + 2x + x^2 &= -2 + 2(1+x) + (1+x^2) \end{aligned}$$

$\boxed{0.4}$

Luego la matriz representante de $S \circ T$ con respecto a la base β viene dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{0.5}$

P2.- a) (2 ptos.) Determine, justificando apropiadamente, cuáles de las siguientes matrices son diagonalizables:

$$i)\ A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ii)\ A_2 = \begin{bmatrix} \pi & 1 & -\frac{3}{4} \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad iii)\ A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) (4 ptos.) Escriba la cónica

$$4x^2 + 4xy + y^2 + 3\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y = 5$$

de manera centrada e identifíquela. Explicite todos los cambios de variables requeridos y dibuje la cónica (en los ejes xy originales).

Pauta.

a) *i)* Calculemos los valores propios

$$\det(A_1 - \lambda I) = (1-\lambda)^3.$$

Luego 1 es el único valor propio (con multiplicidad algebraica igual a 3). $\boxed{0.3}$
Para calcular la multiplicidad geométrica:

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Claramente $\mathrm{Ker}(A-I) = \{[x_1, x_2, x_3] : x_2 = 0\}$ que está generado por los vectores $[1,0,0]$, $[0,0,1]$, por lo que la multiplicidad geométrica de 1 es 2. $\boxed{0.4}$

Concluimos que A_1 no es diagonalizable. $\boxed{0.3}$

ii) A_2 es simétrica por lo que es diagonalizable. $\boxed{0.5}$

iii) Calculemos los valores propios de A_3:

$$\det(A_3 - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda).$$

Luego los valores propios son $3, 2, -1$ y como son todos distintos la matriz es diagonalizable. $\boxed{0.5}$

b) La parte cuadrática de la cónica es

$$4x^2 + 4xy + y^2 = [x, y] \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

$\boxed{0.3}$

Diagonalicemos la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$:

$$\det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 4 - 5\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda(\lambda - 5),$$

por lo que los valores propios son 5 y 0. $\boxed{0.5}$
Vector propio asociado a 5:

$$A - 5I = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Las dos filas son l.d. por lo que tenemos la ecuación

$$-x_1 + 2x_2 = 0.$$

Así $\mathrm{Ker}(A - 5I)$ viene generado por $v_1 = [2,1]^t$. $\boxed{0.5}$
No es necesario calcular un vector propio asociado a 0 ya que es ortogonal a v_1:

$$v_2 = [-1, 2]^t.$$

$\boxed{0.5}$

Definamos

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{0.4}$ (hay que normalizar!!)

Entonces

$$A = PDP^t$$

y haciendo el cambio de variables

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

tenemos

$$4x^2 + 4xy + y^2 = [u,\ v] D \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 5u^2.$$

De lo anterior

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2u - v \\ u + 2v \end{bmatrix}.$$

$\boxed{0.5}$

En términos de las variables u, v la ecuación de la cónica se escribe

$$\begin{aligned} 5u^2 + 3(2u - v) + 4(u + 2v) &= 5 \\ 5u^2 + 10u + 5v &= 5 \\ u^2 + 2u + v &= 1 \\ (u + 1)^2 &= 2 - v \\ v &= 2 - (u + 1)^2. \end{aligned}$$

$\boxed{0.5}$

Es una parábola $\boxed{0.3}$ con vértice en $u = -1$, $v = 2$.

[DIBUJO] $\boxed{0.5}$

P3.- Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, una transformación lineal. Suponga que que existen vectores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ linealmente independientes y $\mu \in \mathbb{R}$ tales que

$$T(v_1) = \mu v_1, \qquad T(v_2) = \mu v_2 + v_1.$$

El objetivo de la pregunta es probar que T no es diagonalizable, es decir, no existe base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de T.

a) (1.5 ptos.) Demuestre que existe una base β de $\mathbb{R}^n$ tal que la matriz representante de T con respecto a β en los espacios de partida y llegada tiene la forma

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} \mu & 1 & \\ 0 & \mu & C \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & B \\ 0 & 0 & \end{array}\right]$$

donde C es una matriz de 2 filas y $n-2$ columnas y B es una matriz de $(n-2) \times (n-2)$.

b) (1 pto.) Pruebe que

$$\det(A - \lambda I_n) = (\mu - \lambda)^2 \det(B - \lambda I_{n-2}),$$

donde I_k denota la matriz identidad de $k \times k$.

c) (1 pto.) Sea m_a la multiplicidad algebraica de μ como valor propio de A, y $\tilde{m}_a$ la multiplicidad algebraica de μ como valor propio de B (con la convención $\tilde{m}_a = 0$ si μ no es valor propio de B). Deduzca que

$$m_a = \tilde{m}_a + 2.$$

d) (1.5 ptos.) Pruebe que

$$\dim \operatorname{Ker}(A - \mu I) \leq \dim \operatorname{Ker}(B - \mu I) + 1$$

(Ker es lo mismo que núcleo).

e) (1 pto.) Concluya que T no es diagonalizable.

Pauta.

a) Como los vectores v_1 y v_2 son l.i. se puede encontrar $v_3, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ tales que $\beta = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ sea una base de $\mathbb{R}^n$ $\boxed{0.9}$. La matriz representante A de T con respecto a esta base tiene la forma deseada. En efecto de las relaciones

$$T(v_1) = \mu v_1, \qquad T(v_2) = \mu v_2 + v_1,$$

vemos que la primera columna de A es

$$\begin{bmatrix} \mu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{0.3}$

y la segunda

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \mu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{0.3}$

Esto prueba la afirmación

b) Desarrollando por la primera columna $\boxed{0.2}$

$$\det(A - \lambda I_n) = \det \left[\begin{array}{cc|c} \mu - \lambda & 1 & c_{11} \ldots \; c_{1,n-2} \\ 0 & \mu - \lambda & c_{21} \ldots \; c_{2,n-2} \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & B - \lambda I_{n-2} \\ 0 & 0 & \end{array}\right]$$

$\boxed{0.3}$

$$= (\mu - \lambda) \det \left[\begin{array}{c|c} \mu - \lambda & c_{21} \ldots \; c_{2,n-2} \\ \hline 0 & \\ \vdots & B - \lambda I_{n-2} \\ 0 & \end{array}\right]$$

$\boxed{0.3}$

$$= (\mu - \lambda)^2 \det(B - \lambda I_{n-2}).$$

$\boxed{0.2}$

c) Por definición

$$\det(B - \lambda I_{n-2}) = (\mu - \lambda)^{\tilde{m}_a} q(\lambda)$$

donde $q(\lambda)$ es un polinomio que no tiene a μ como raíz. $\boxed{0.3}$ Por la parte anterior

$$\det(A - \lambda I_n) = (\mu - \lambda)^{2+\tilde{m}_a} q(\lambda)$$

$\boxed{0.3}$

y de aquí se deduce que $m_a = \tilde{m}_a + 2$. $\boxed{0.4}$

d) Tenemos

$$A - \mu I_n = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & c_{11} \dots \ c_{1,n-2} \\ 0 & 0 & c_{21} \dots \ c_{2,n-2} \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & B - \mu I_{n-2} \\ 0 & 0 & \end{array}\right]$$

Calcularemos $\dim \operatorname{Ker}(A - \mu I_n)$ mediante el teorema del núcleo-imagen:

$$\dim \operatorname{Ker}(A - \mu I_n) = n - \dim \operatorname{Im}(A - \mu I_n).$$

$\dim \operatorname{Im}(A - \mu I_n)$ es el rango $A - \mu I_n$ (igual al número de columnas l.i. de $A - \mu I_n$ y al número de filas l.i. de esta matriz).

$$\begin{aligned} \text{número de filas l.i. de } (A - \mu I_n) &= 1 + \text{número de filas l.i. de } \left[\begin{array}{c|c} 0 & c_{21} \dots \ c_{2,n-2} \\ \hline 0 & \\ \vdots & B - \mu I_{n-2} \\ 0 & \end{array}\right] \\ &\geq 1 + \text{número de filas l.i. de } (B - \mu I_{n-2}) \\ &= 1 + \dim \operatorname{Im}(B - \mu I_{n-2}) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker}(A - \mu I_n) &= n - \dim \operatorname{Im}(A - \mu I_n) \\ &\leq n - (1 + \dim \operatorname{Im}(B - \mu I_{n-2})) \\ &= 1 + (n - 2 - \dim \operatorname{Im}(B - \mu I_{n-2})) \\ &= 1 + \dim \operatorname{Ker}(B - \mu I_{n-2}) \end{aligned}$$

$\boxed{1.5}$

e) Como $\dim \operatorname{Ker}(B - \mu I_{n-2}) \leq \tilde{m}_a$ (utilizando la notación de la parte **c)**), de **c)** y **d)** vemos que

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker}(A - \mu I_n) &\leq 1 + \dim \operatorname{Ker}(B - \mu I_{n-2}) \leq 1 + \tilde{m}_a \\ &< m_a. \end{aligned}$$

$\boxed{0.5}$

Es decir, la multiplicidad geométrica de μ como valor propio de A es menor (estricta) que la multiplicidad algebraica. Por lo tanto A no es diagonalizable. $\boxed{0.5}$