Pauta Examen 2a fecha MA11A Álgebra

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.
Semestre Primavera 2005

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio.

Pregunta 1. Considere la cónica

$$5x^2 + 5y^2 + 2axy + 8\sqrt{2}x = 0$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

a) (5 ptos.) Encuentre los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la cónica es

- una circunferencia
- una elipse
- una parábola
- una hipérbola

b) (1 ptos.) Para el caso $a = 3$ bosqueje la cónica resultante e indique los cambios de variables requeridos para el bosquejo.

Pauta.

a) La parte cuadrática en la ecuación de la cónica se puede escribir como

$$5x^2 + 2axy + 5y^2 = [x\ y] \begin{bmatrix} 5 & a \\ a & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Definamos

$$A = \begin{bmatrix} 5 & a \\ a & 5 \end{bmatrix}$$

y calculemos sus valores propios:

$$det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} 5-\lambda & a \\ a & 5-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)^2 - a^2 = (5 - \lambda + a)(5 - \lambda - a)$$

Luego las soluciones de $det(A - \lambda I) = 0$ son $\lambda = 5 + a$, $\lambda = 5 - a$.

Conviene de inmediato distinguir los casos $a = 0$, $a \neq 0$ ya que en el primero la matriz A es diagonal.

<u>**Caso $a = 0$.**</u> En este caso la ecuación de la cónica resulta (dividiendo por 5)

$$x^2 + y^2 + \frac{8\sqrt{2}}{5}x + 0$$

$$\iff (x + \frac{4\sqrt{2}}{5})^2 + y^2 = \frac{32}{25}$$

lo que corresponde a una circunferencia.

De ahora en adelante procedemos con el caso $a \neq 0$.

<u>**Caso $a \neq 0$.**</u>

<u>Valor propio $\lambda = 5 - a$:</u>

$$A - (5 + a)I = \begin{bmatrix} -a & a \\ a & -a \end{bmatrix}$$

Sólo tenemos la ecuación

$$-ax_1 + ax_2 = 0 \Longleftrightarrow x_1 = x_2$$

ya que estamos en el caso $a \neq 0$. Luego $Ker(A - (5+a)I) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

Valor propio $\lambda = 5 - a$:

$$A - (5-a)I = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$$

y tenemos la ecuación:

$$ax_1 + ax_2 = 0 \Longleftrightarrow x_1 = -x_2.$$

Encontramos así $Ker(A - 3I) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$. Definiendo P como la matriz cuyas columnas son los vectores propios encontrado anteriormente (debidamente normalizados), esto es

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

obtenemos

$$A = PDP^t \quad \text{donde } D = \begin{bmatrix} 5+a & 0 \\ 0 & 5-a \end{bmatrix}$$

Haciendo el cambio de variables

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

tenemos

$$[x\ y]\ A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)^t DP^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [u\ v]\ D \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = (5+a)u^2 + (5-a)v^2.$$

Para transformar el resto de la cónica notamos que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} u+v \\ u-v \end{bmatrix}.$$

De este modo

$$8\sqrt{x} = 8(u+v).$$

Luego la ecuación de la cónica queda

$$(5+a)u^2 + (5-a)v^2 + 8u + 8v = 0.$$

Analicemos lo que ocurre en los siguientes subcasos (recordemos que estamos suponiendo $a \neq 0$.

- Si $a = 5$ la ecuación de la cónica se reduce a

  $$10u^2 + 8u + 8v = 0$$

  lo que corresponde a una parábola.
- Si $a = -5$ la ecuación de la cónica se reduce a

  $$-10v^2 + 8u + 8v = 0$$

  lo que corresponde a una parábola.

- Si $-5 < a < 5$ entonces $5 + a > 0$, $5 - a > 0$. Esto puede ser la ecuación de una elipse pero antes debemos completar cuadrados y verificar si la ecuación es vacía.

$$\begin{aligned}
&(5+a)u^2 + (5-a)v^2 + 8u + 8v = 0 \\
\Longleftrightarrow &(5+a)\left(u^2 + \frac{8}{5+a}u\right) + (5-a)\left(v^2 + \frac{8}{5-a}v\right) = 0 \\
\Longleftrightarrow &(5+a)\left(u + \frac{4}{5+a}\right)^2 + (5-a)\left(v + \frac{4}{5-a}\right)^2 = \frac{16}{5+a} + \frac{16}{5-a}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

  Como el lado derecho es positivo, la ecuación es no vacía y corresponde a una elipse.

- Si $a < -5$ entonces uno de los valores propios es positivo $(5 + a < 0)$ y el otro es negativo $(5 - a > 0)$. El lado derecho de (1) es

$$16\left(\frac{1}{5+a} + \frac{1}{5-a}\right) = \frac{160}{25 - a^2} \neq 0$$

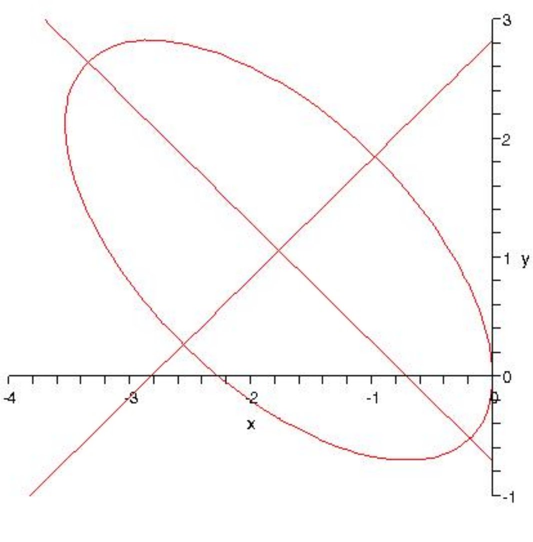
  y por lo tanto la cónica es una hipérbola.

- Si $a > 5$ tenemos $a + 5 > 0$, $a - 5 < 0$. La ecuación (1) sigue siendo válida y el lado derecho de ésta es no nulo, por lo que se trata de una hipérbola.

b) En el caso $a = 3$ ya sabemos que se trata de una elipse que en las variables u, v tiene ecuación

$$\begin{aligned}
&8\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\,(v+2)^2 = \frac{16}{8} + \frac{16}{2} = 10 \\
\Longleftrightarrow &\frac{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{5}{4}} + \frac{(v+2)^2}{5} = 1.
\end{aligned}$$

Los ejes de esta elipse son las rectas generadas por los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y el centro de ésta, con respecto a las variables u, v es $(-\frac{1}{2}, -2)$, teniendo un eje mayor $\sqrt{5}$ y eje menor $\frac{\sqrt{5}}{2}$.



Puntaje.

a) - 0,3 reconocer la parte cuadrática de la cónica (encontrar A)

- 0,6 valores propios de A
- 0,8 vector propio asociado a $5+a$
- 0,8 vector propio asociado a $5-a$
- 0,5 matriz P de cambio de coordenadas (lo que incluye la normalización)
- 0,5 transformación de la ecuación de la cónica a las variables u, v
- 0,2 por identificar la circunferencia
- 0,3 por los casos $a=5$, $a=-5$ (parábolas)
- 0,4 por notar que $-5<a<5$ da una elipse (incluida la verificación que no es vacía)
- 0,1 por ver que la elipse es no vacía
- 0,4 por ver que $a<-5$ o $a>5$ da una hipérbola
- 0,1 por ver que la hipérbola no se reduce a dos rectas

b)
- 0,5 por la orientación de los ejes
- 0,3 por una idea correcta de la posición del centro de la elipse
- 0,2 por notar que la elipse para por el origen

Pregunta 2. En esta pregunta $\mathcal{P}_k$ denota el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que k.

Se define $S:\mathcal{P}_5\to\mathcal{P}_3$ mediante

$$S(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$$

y $T:\mathcal{P}_3\to\mathcal{P}_3$:

$$T(p(x))=S\big(p(x)(1+x+x^2)-p(1)\big).$$

a) (1,5 ptos.) Pruebe que S y T son lineales.

b) (1,5 ptos.) Encuentre la matriz representante de T con respecto a las base canónica $\{1,x,x^2,x^3\}$ en el dominio y recorrido.

c) (1,5 ptos.) Encuentre una base de $Ker(T)$ y una base de $Im(T)$.

d) (1,5 ptos.) Utilizando matrices de cambio de base calcule la matriz representante de T con respecto a la base $\{1,1+x,1+x^2,1+x^3\}$ en el dominio y recorrido.

Pauta.

a) <u>S es lineal.</u>

$$\begin{aligned}
&S(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\lambda(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4+b_5x^5))\\
&=S((a_0+\lambda b_0)+(a_1+\lambda b_1)x+(a_2+\lambda b_2)x^2+(a_3+\lambda b_3)x^3+(a_4+\lambda b_4)x^4+(a_5+\lambda b_5)x^5)\\
&=(a_0+\lambda b_0)+(a_1+\lambda b_1)x+(a_2+\lambda b_2)x^2+(a_3+\lambda b_3)x^3\\
&=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\lambda(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3)\\
&=S(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5)+\lambda S(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4+b_5x^5).
\end{aligned}$$

<u>T es lineal.</u> T es la composición de S con la función

$$L(p(x))=p(x)(1+x+x^2)-p(1),\quad p(x)\in\mathcal{P}_3,$$

por lo que $L:\mathcal{P}_3\to\mathcal{P}_5$. Verifiquemos que L es lineal, lo que implicará que $T=S\circ L$ es lineal. En efecto

$$\begin{aligned}
L(p(x)+\lambda q(x))&=(p(x)+\lambda q(x))(1+x+x^2)-(p(1)+\lambda q(1))\\
&=p(x)(1+x+x^2)-p(1)+\lambda(q(x)(1+x+x^2)-q(1))\\
&=L(p(x))+\lambda L(q(x)).
\end{aligned}$$

b) La matriz representante de T con respecto a la base canónica $\{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathcal{P}_3$ se encuentra calculando $T(x^i)$, $0 \leq i \leq 3$ y expresando este polinomio como combinación lineal de los elementos de la base. Denotemos por A la matriz representante de T con respecto a la base canónica. Entonces

$$p(x) = 1 \Longrightarrow T(p(x)) = S(1 + x + x^2 - p(1)) = x + x^2 \Longrightarrow \text{la 1a comluna de } A \text{ es } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$p(x) = x \Longrightarrow T(p(x)) = S(x(1 + x + x^2) - p(1)) = x + x^2 + x^3 - 1 \Longrightarrow \text{la 2a comluna de } A \text{ es } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} p(x) = x^2 \Longrightarrow T(p(x)) &= S(x^2(1 + x + x^2) - p(1)) \\ &= S(x^2 + x^3 + x^4 - 1) = -1 + x^2 + x^3 \Longrightarrow \text{la 3a comluna de } A \text{ es } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x) = x^3 \Longrightarrow T(p(x)) &= S(x^3(1 + x + x^2) - p(1)) \\ &= S(x^3 + x^4 + x^5 - 1) = -1 + x^3 \Longrightarrow \text{la 4a comluna de } A \text{ es } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Así

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) <u>$Ker(T)$.</u> Para encontrar $Ker(T)$ resolvemos el sistema $Ax = 0$ pivoteando la matriz A

$$\begin{array}{rrrr} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \text{(permutamos las filas 1 y 2)} \longrightarrow \begin{array}{rrrrl} 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & -1 & -1 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \text{(3a) = (3a)-(1a)} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \text{(4a) = (4a)+(2a)} \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Escribiendo las componentes de x en $Ax = 0$ como $x_1, \ldots, x_4$ la matriz anterior nos dice que

$$\begin{aligned} x_3 &= 0 \\ -x_2 - x_3 - x_4 = 0 &\Longrightarrow x_2 = -x_4 \\ x_1 + x_2 = 0 &\Longrightarrow x_1 = -x_2 = x_4. \end{aligned}$$

Luego $Ker(A)$ está generado por $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y se sigue que $Ker(T)$ está generado por el polinomio $1 - x + x^3$.

Base para $Im(T)$. Partimos buscando una base para la imagen de A. Como $Im(A)$ está generada por las columnas de A, debemos encontrar una base de entre estas columnas. Escribiendo éstas como filas pivoteamos

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \text{(permutamos las filas 1 y 4)} \longrightarrow \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{(3a)=(3a)-(1a)} \\ \text{(4a)=(4a)-(1a)} \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Así una base de $Im(A)$ es

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esto se traduce en que una base de $Im(T)$ es

$$-1 + x^3, \; x, \; x^2.$$

d) La matriz de pasaje de la base $\beta = \{1, 1+x, 1+x^2, 1+x^3\}$ a la canónica, es decir, la matriz que representa la función identidad cuando en la partida tenemos la base β y en la llegada la base canónica viene dada por

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La inversa, Q^{-1} permite pasar de la base canónica a la base β. Denotemos por $\widetilde{A}$ la matriz que representa A cuando en el dominio y recorrido utilizamos la base β. Entonces

$$\widetilde{A} = Q^{-1} A Q.$$

Calculemos Q^{-1}

$$\left.\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \longrightarrow \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

y obtenemos

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora calculamos

$$Q^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y después

$$\widetilde{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & -5 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Puntaje.

a)
- 0,8 S es lineal
- 0,7 T es lineal

b)
- 0,3 por cada $T(x^i)$ expresado como combinación lineal de los elementos de la base
- 0,3 por la matriz representante

c)
- 0,7 $Ker(T)$
- 0,4 por la idea de buscar columnas l.i. de A
- 0,4 base de $Im(T)$

d)
- 0,5 matriz de pasaje de la base del enunciado a la canónica (matriz Q de esta pauta)
- 0,5 inversa de Q
- 0,5 matriz representante de T en la nueva base

Pregunta 3. Considere la recurrencia

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{4}x_{n-1}, \quad \forall n \geq 1. \tag{*}$$

a) (1 pto.) Verifique que x_n cumple (*) si y sólo si

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad \forall n \geq 1,$$

y utilice lo anterior para probar por inducción

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad \forall n \geq 1.$$

b) (1 pto.) Calcule los valores propios de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$ y los vectores propios

c) (1,5 ptos.) Encuentre P invertible y J en forma de Jordan tales que $PJP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$.

d) (2 ptos.) Calcule explícitamente $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}^n$ para $n \geq 0$.

Ind.: $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

e) (0,5 ptos.) Encuentre una fórmula explícita para x_n en función de x_0, x_1 y n para $n \geq 0$.

Pauta.

a) Notemos que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ -\frac{1}{4}x_{n-1} + x_n \end{bmatrix}, \tag{2}$$

luego la recurrencia es equivalente a

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad \forall n \geq 1.$$

<u>Inducción.</u> Suponemos que x_n satisface la recurrencia del enunciado.
El caso $n = 1$ es directo :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -\frac{1}{4}x_0 + x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

El paso inductivo : suponemos

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+1} - \frac{1}{4}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}^{n+1} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) Escribamos $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$. Entonces

$$det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1-\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)(1-\lambda) + \frac{1}{4} = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = (\lambda - \frac{1}{2})^2.$$

Luego el único valor propio de A es $\frac{1}{2}$ con multiplicidad algebraica 2.

Calculemos el subespacio propio: $A - \frac{1}{2}I = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ y $(A - \frac{1}{2}I)x = 0$ es equivalente a

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 0 \Longleftrightarrow x_1 = 2x_2.$$

Luego encontramos que $Ker(A - \frac{1}{2}I)$ está generado por el vector $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Observamos que $Ker(A - \frac{1}{2}I)$ tiene dimensión 1 por lo que A no es diagonalizable.

c) Para encontrar la forma de Jordan de A buscamos un vector x tal que $(A-\frac{1}{2}I)x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Escribiendo las componentes de x como x_1, x_2 notamos que el sistema queda

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x_1 + x_2 &= 2 \\ -\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 &= 1 \iff -\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 2. \end{aligned}$$

Una solución de este sistema es $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Utilizando que $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ es vector propio de A y $A\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (al vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ se le llama vector propio generalizado, tenemos que

$$A = PJP^{-1},$$

donde

$$J = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad , \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

d) Tenemos que

$$A^n = (PJP^{-1})^n = PJ^nP^{-1}.$$

Utilizando la indicación calculamos

$$J^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} (\frac{1}{2})^n & n(\frac{1}{2})^{n-1} \\ 0 & (\frac{1}{2})^n \end{bmatrix}.$$

Necesitamos también P^{-1}:

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} PJ^n &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (\frac{1}{2})^n & n(\frac{1}{2})^{n-1} \\ 0 & (\frac{1}{2})^n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\frac{1}{2})^{n+1} & n(\frac{1}{2})^n \\ (\frac{1}{2})^n & n(\frac{1}{2})^{n-1} + (\frac{1}{2})^{n+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} A^n = PJ^nP^{-1} &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (\frac{1}{2})^{n+1} & n(\frac{1}{2})^n \\ (\frac{1}{2})^n & n(\frac{1}{2})^{n-1} + (\frac{1}{2})^{n+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (\frac{1}{2})^{n+2} - n(\frac{1}{2})^n & n(\frac{1}{2})^{n+1} \\ (\frac{1}{2})^{n+1} - n(\frac{1}{2})^{n-1} - (\frac{1}{2})^{n+1} & n(\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})^{n+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\frac{1}{2})^n - n(\frac{1}{2})^n & n(\frac{1}{2})^{n-1} \\ -n(\frac{1}{2})^{n-3} & n(\frac{1}{2})^{n-2} + (\frac{1}{2})^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e) De la fórmula

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{1}{2})^n - n(\frac{1}{2})^n & n(\frac{1}{2})^{n-1} \\ -n(\frac{1}{2})^{n-3} & n(\frac{1}{2})^{n-2} + (\frac{1}{2})^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

obtenemos

$$x_n = \left((\frac{1}{2})^n - n(\frac{1}{2})^n\right)x_0 + n(\frac{1}{2})^{n-1}x_1, \quad \forall n \geq 0.$$

Puntaje.

a)
- 0,5 verificar que la recurrencia se puede escribir en forma matricial como en el enunciado
- 0,5 inducción

b)
- 0,5 valores propios de la matriz
- 0,5 vector propio

c)
- 0,5 vector propio generalizado
- 0,5 matriz J
- 0,5 matriz P

d)
- 0,5 saber $(PJP^{-1})^n = PJ^nP^{-1}$
- 0,5 por P^{-1}
- 0,5 por J^n
- 0,5 por PJ^nP^{-1}

e)
- 0,5