Examen 2da. Fecha MA11A ALGEBRA
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
16 de Diciembre de 2006

Pauta Problema 1

Escalonando la matriz asociada al sistema

$$\begin{bmatrix} \alpha & -2 & 0 & -1 & -1 \\ \alpha & -3 & 2 & -1 & -2 \\ -\alpha & 2 & 1 & -1 & \\ -\alpha & 4 & -4 & \beta+1 & \alpha+\beta+3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & \beta & \alpha+\beta+2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(4)-2(2)} \begin{bmatrix} \alpha & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha+\beta \end{bmatrix} (*)$$

Caso $\alpha = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \beta \end{bmatrix} \xrightarrow{2\cdot(2)+(1)} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \beta \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{4(3)+(2)} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \beta \end{bmatrix}$$

Si $\beta \neq 0$, la ecuación 4 $\Rightarrow x_4 = 1$ y la ecuación 3 $\Rightarrow -9x_4 = 1$. Entonces no hay solución.
Si $\beta = 0$ la última fila contiene solo ceros $\Rightarrow$ infinitas soluciones. (2.0 ptos.)
Caso $\alpha \neq 0$.
Si $\beta = 0$ la ecuación 4 de (*) nos da $0 = \alpha \neq 0$
$\Rightarrow$ no hay soluciones.
Si $\beta \neq 0 \Rightarrow (*)$ es escalonamiento perfecto $\Rightarrow$ solución única.

En resumen: Si $\alpha = 0, \beta \neq 0$ o $\alpha \neq 0, \beta = 0$ no hay soluciones
Si $\alpha = \beta = 0$ hay infinitas soluciones.
Si $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$ hay solución única. (2.0 ptos.)

ii) Para $\alpha = -1, \beta = 1$ (*) con I_4 queda

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccccc} -1 & -2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)-2(2)}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccccccc} -1 & 0 & -4 & -1 & 1 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{1+4(3)}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} -1 & 0 & 0 & -9 & 1 & 7 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\binom{9(4)+(1)}{-2(3)+(2)}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 16 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\binom{-4(4)+(2)}{2(4)+(3)}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 16 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -7 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ajustando signos en (1) y (2) queda

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -16 & -4 & -9 \\ -1 & 7 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y solución } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2.0 ptos.)

Observación. Si no invierte y la solución la deduce directamente de (*), asignar solo (0.5 ptos.)

Pauta Pregunta 2

a) Es inmediato que los vectores $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ son $\ell.i.$ pues

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0.$$

(0.5 ptos.)

Por lo tanto los tres vectores constituyen base de S.

Agregando, por ejemplo, el vector $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ que es linealmente independiente de los anteriores se constituye

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

que es base de $V=\mathbb{R}^4$.

Por lo tanto el subespacio pedido será $S'=\langle\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\rangle$ con $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ base de S' de $dim(S')=1$ y $V=S\oplus S'$.

(1.0 pto.)

b) Como $dim(V)=dim(S)+dim(S^{\perp})$ y $dim(S^{\perp})=1$ pues $4=3+dim(S^{\perp})$.

(0.5 ptos.)

Entonces debe encontrarse un vector de $\mathbb{R}^4$ ortogonal a S. Sea

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}\alpha=0\\-\beta=0\\\alpha+\beta+\gamma+\delta=0\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}\alpha=\beta=0\\\gamma=-\delta\end{matrix}$$

de modo que una posibilidad es $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$

Así $S^{\perp} = \langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \rangle$ con $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ base de $S^{\perp}$.

(1.0 pto.)

c) Se sabe que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ en que

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

es base de $\mathbb{R}^4$

Ortogonalizando (Gram-Schmidt) se tiene

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(0.5 ptos.)

$$\begin{aligned} u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|} u_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u_3 \end{aligned}$$

(0.5 ptos.)

y $u_4 = v_4$ de modo que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ es base ortogonal de } \mathbb{R}^4$$

y la base ortonormal será

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

(0.5 ptos.)

d) Para la proyección de $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ sobre S se tiene. La base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ es

$$\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Base de } S}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{base de } S^{\perp}} \right\}$$

Así

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} a + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(0.5 ptos.)

en donde interesan los valores de α, β y γ para la proyección de x sobre S.
Entonces

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha \\ x_2 &= -\beta \\ x_3 &= \gamma + \delta \\ x_4 &= \gamma - \delta \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha &= x_1 \\ \beta &= -x_2 \\ \gamma &= \tfrac{x_3 + x_4}{2} \end{aligned}$$

Así, la proyección sobre S es

$$P_S(x) = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x_3 + x_4}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es decir

$$P_S(x) = x_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{x_3 + x_4}{2} \\ \frac{x_3 + x_4}{2} \end{pmatrix}$$

(1.0 pto.)

Pauta Problema 3

i) La forma cuadrática en la ecuación de la cónica se escribe como

$$(x,y)A\binom{x}{y} \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Para los valores propios de $A : det(A - \lambda I) = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \begin{array}{c} \lambda_1 = 1/2 \\ \lambda_2 = -1/2 \end{array}$$

(1.0 pto.)

Vectores propios de A

$$\lambda_1 = 1/2; (A - \lambda I)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x + y = 0 \Rightarrow x = y$$

de modo que $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_2 = -1/2; (A - \lambda I)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow x = -y$$

(1.0 pto.)

Así $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Entonces $A = PDP^t$ donde $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Con el cambio de variables $\binom{u}{v} = P^t \binom{x}{y}$ que equivale a $\binom{x}{y} = P\binom{u}{v}$ $(P^t = P^{-1}$

se tiene $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v) \end{array}$$

(1.0 pto.)

Reemplazando en la ecuación original, la cónica queda

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(u^2 - v^2) - \frac{p}{\sqrt{2}}(u - v) - \frac{2p}{\sqrt{2}}(u + v) = 0 \\ \Rightarrow u^2 - v^2 - p\sqrt{2}(u - v) - 2\sqrt{2}(u + v) = 0 \\ \Rightarrow u^2 - v^2 - p\sqrt{2}(3u + v) = 0 \text{ y completando cuadrados} \\ (u - \frac{3}{2}\sqrt{2}p)^2 - \frac{9}{2}p^2 - (v + \frac{p\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}p^2 = 0 \end{aligned}$$

Asi queda

$$(u - \frac{3\sqrt{2}}{2}p)^2 - (v + \sqrt{2}2p)^2 = 4p^2$$

(1.0 pto.)

que corresponde a una hipérbola equilatera centrada en $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}p, -\frac{\sqrt{2}}{2}p\right)$ en el sistema (u, v) y sus semiejes son, ambos, $2p$.

(1.0 pto.)

ii) Si $p = 0$, la cónica se transforma en $u^2 - v^2 = 0$, o bien $v = \pm u$ que son las rectas bisectrices del sistema (u, v) equivalentes a las rectas $x = 0, y = 0$ (ejes) del sistema original.

(1.0 ptos.)