U. DE CHILE

INGENIERIA

Escuela de Ingeniería. FCFM-U. de Chile.
ALGEBRA MA–11A
Guía de Problemas Control 4 2004

Disponible en `www.dim.uchile.cl/~lmella/MA11A.html`

1. Sea $M_{2,2}(\mathbb{Z}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,/\, a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$. Demuestre que $(M_{2,2}(\mathbb{Z}_3), +, \cdot)$ (con la suma y multiplicación de matrices inducida por $\mathbb{Z}_3$) es un cuerpo con 9 elementos y $(M_{2,2}(\mathbb{Z}_3) \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo (cíclico) de orden 8 (Nota: 0 denota la matriz nula).

2. Dado el sistema lineal:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
(2-\beta) & x_1 & + & (-1+\beta) & x_2 & + & 5\beta & x_3 & + & & x_4 & = & 0 \\
(-2+\beta) & x_1 & + & (2-2\beta) & x_2 & - & 5\beta & x_3 & - & & x_4 & = & 0 \\
(2-\beta) & x_1 & + & (-1+\beta) & x_2 & + & (1+4\beta) & x_3 & + & 2 & x_4 & = & 0 \\
(-2+\beta) & x_1 & + & (1-\beta) & x_2 & - & 5\beta & x_3 & + & (-1+\beta) & x_4 & = & 0
\end{array}$$

Encuentre las condiciones sobre $\beta \in \mathbb{R}$ necesarias para que el sistema:

(i) tenga infinitas soluciones (encuentre el conjunto solución),
(ii) tenga solución única (encuentre esta solución), y
(iii) no tenga solución.

3. Sean $B \in M_{p,p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{q,q}(\mathbb{R})$, $n = p + q$ y $0_{s,t}$ la matriz nula de tamaño $s \times t$. Se define $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ de forma que

$$A = \begin{pmatrix} B & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & C \end{pmatrix}.$$

(i) Demostrar que $A^2 = \begin{pmatrix} B^2 & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & C^2 \end{pmatrix}$.

(ii) Pruebe que si $k = \max(p, q)$, entonces $(A - dI)^k = 0_{n,n}$ cuando tanto B como C son matrices de la forma

$$\begin{pmatrix}
d & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & d & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & d & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & d
\end{pmatrix}.$$

4. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Considere el sistema lineal en las variables x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1 & + & 2 & x_2 & & & & + & b & x_4 & = & b \\
x_1 & + & (a+2) & x_2 & + & 2 & x_3 & + & b & x_4 & = & 2 \\
 & & 2a & x_2 & + & 5 & x_3 & + & 2 & x_4 & = & 7 \\
-x_1 & - & 2 & x_2 & & & & & & & = & a
\end{array}$$

(i) Considere $a \neq 0$. Estudie la existencia de soluciones del sistema en función de los parámetros a y b. En caso de tener solución diga si es única.
(ii) Considere $a = 0$. Estudie bajo que condiciones el sistema tiene solución y explicite el conjunto solución.

5. Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que el siguiente sistema de ecuaciones tenga solución:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & + & 2 & x_2 & + & 3 & x_3 & + & 4 & x_4 & = & a \\ x_1 & + & 2 & x_2 & + & & x_3 & + & 2 & x_4 & = & b \\ & & 2 & x_2 & + & 2 & x_3 & + & 2 & x_4 & = & a \\ x_1 & & & & & & & + & & x_4 & = & b \\ x_1 & + & 2 & x_2 & + & 3 & x_3 & + & 4 & x_4 & = & b{+}1 \end{array}$$

6. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Considere el sistema lineal en las variables reales x_1, x_2, x_3, x_4 siguiente

$$\begin{array}{ccccccccc} -\beta x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ -\beta x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ \beta x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ -\beta x_1 & + & 4x_2 & - & 4x_3 & + & (\alpha+1)x_4 & = & (\alpha+\beta+3) \end{array}$$

i) Determinar los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema lineal tiene solución única.
ii) Determinar los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema lineal tiene infinitas soluciones.
iii) Determinar los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema lineal no tiene solución.
iv) Para $\alpha = 1$ y $\beta = 1$ encuentre la inversa de la matriz de coeficientes del sistema lineal y determine la solución del sistema.

7. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Determine los valores de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ c & a & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Discuta la solución en función del parámetro α.

8. Considere

$$A = \begin{pmatrix} I & D & 0 \\ D & I & U \\ 0 & U & I \end{pmatrix}$$

una matriz cuadrada particionada en bloques, donde $D = diag(d_1, \ldots, d_m)$ con $d_i \neq 0$ y $d_i \neq \pm 1$, y U es una matriz triangular superior.
(i) Pruebe que existen matrices

$$E_1 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ C_1 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \text{ y } E_2 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & C_2 & I \end{pmatrix}$$

particionadas en bloques tales que $E_2 E_1 A = \overline{A}$ con

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & A_4 & A_5 \\ 0 & 0 & A_6 \end{pmatrix}$$

una matriz triangular superior.
(ii) Encuentre condiciones sobre los coeficientes de U para que $\overline{A}$ sea invertible.

9. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Determine para que valor(es) de α la matriz A es invertible y encuentre su descomposición LU de A.

10. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$.
(i) Encuentre la descomposición LU de A.
(ii) Resuelva el sistema $Ax = b$.

11. (Problema de interpolación polinomial) Sean $x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Se pide determinar el polinomio de grado menor o igual a n, es decir, de la forma $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$ tal que $P(x_i) = y_i$, para todo $i = 0, \ldots, n$.
(ii) Pruebe que el problema tiene solución única si $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j$.
(iii) Pruebe que el problema NO tiene solución si y sólo si existen $i \neq j$ tales que $x_i = x_j$ e $y_i \neq y_j$.

<u>Indicación</u>: En forma matricial el problema se escribe

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}.$$

12. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determine todos los vectores b tales que $Ax = b$ tenga solución.

13. Obtenga la descomposición LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

En base a la descomposición anterior resuelva $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

14. Encuentre la descomposición LU de la siguiente matriz especificando las matrices elementales usadas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Además, determine la inversa de A.

15. Sea el sistema lineal

$$\begin{aligned} (1-\beta)x_1 + \beta x_2 + 2\beta x_3 + 2\beta x_4 &= 0 \\ (\beta-1)x_1 + (2-2\beta)x_2 - 2\beta x_3 - 2\beta x_4 &= 0 \\ (1-\beta)x_1 + \beta x_2 + (2+\beta)x_3 + (1+2\beta)x_4 &= 0 \\ (\beta-1)x_1 - \beta x_2 - 2\beta x_3 + (2-2\beta)x_4 &= 0\,. \end{aligned}$$

(i) Determine los valores de $\beta \in \mathbb{R}$ para los cuales: el sistema tiene solución única, el sistema tiene infinitas soluciones y el sistema no tiene solución. Encuentre las soluciones que aparecen en cada caso.
(ii) Calcule, cuando esta exista, la inversa de la matriz de coeficientes del sistema lineal.

16. Sea $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tal que $A_{i,j} = 0$ si $(i+j)$ es impar y $A_{i,j} = 1$ si $(i+j)$ es par. Calcule la descomposición LU de A.

17. Se postula que existen $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{2x^2+4x+\lambda}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}.$$

(i) Probar que la solución se obtiene resolviendo un sistema lineal de incógnitas A, B, C y D.
(ii) Resolver el sistema usando el método de Gauss expresando las soluciones en función de λ.
(iii) Estudiar la solución en el caso $\lambda = 6$ e interpretar el resultado.

18. (i) Sea $A \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ y $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tales que $A^n = \overbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}^{n \text{ veces}} = 0$. Probar que $I_m - A$ es invertible con inversa $I_m + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$.
(ii) Sean $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $A = I_n + B^t B$, y $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(ii.1) Probar que $\langle Bx, y\rangle = \langle x, B^t y\rangle$.
(ii.2) Probar que $\langle Ax, x\rangle = ||x||^2 + ||Bx||^2$.
(ii.3) Concluya que si $Ax = 0$, entonces $x = 0$.

19. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 4 & 2\alpha \\ 0 & \alpha & -1 & 2\alpha + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2+\alpha \\ 2\beta + \alpha - 2 \end{pmatrix}.$$

Determine los valores de los parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que el sistema de ecuaciones $Ax = b$,

(i) no tenga solución,
(ii) tenga soluciones múltiples (calcule el conjunto solución), y
(iii) tenga solución única (obtenga dicha solución).

20. Considere el sistema lineal en los parámetros α, $\beta \in \mathbb{R}$, $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & \alpha \\ 0 & -1 & 1 & \alpha - \beta \\ -2 & -1 & 2\alpha - 1 & -\beta - 1 \\ 0 & 1 & -1 & \beta - 1 \\ 1 & 0 & 1 & \alpha/2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3-\beta \\ 1 \\ 2\beta - 3/2 \end{pmatrix}.$$

Encuentre las condiciones sobre α y β para que el sistema:

(i) tenga infinitas soluciones (encuentre dichas soluciones),
(ii) tenga solución única (encuentre dicha solución), y
(iii) no tenga soluciones.

21. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{y} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Probar que P es invertible y calcule P^{-1}.
(ii) Probar que $A = PDP^{-1}$ y encontrar A^{10}.

22. (i) Se dice que una matriz cuadrada es idempotente si $A^2 = A$. Sean A y B dos matrices cuadradas idempotentes de la misma dimensión. Probar que $A + B$ es idempotente si y sólo si $AB = -BA$.
(ii) Considere la matriz

$$A(z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & z & z^2 & z^3 & \cdots & z^{n-1} \\ 1 & z^2 & z^4 & z^6 & \cdots & z^{2(n-1)} \\ 1 & z^3 & z^6 & z^9 & \cdots & z^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z^{n-1} & z^{2n-2} & z^{3n-3} & \cdots & z^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

donde z es un número complejo (o bien $A_{i,j} = z^{(i-1)(j-1)}$ cuando $i, j \in \{1, \ldots, n\}$). Demostrar que si z_0 es una raíz n-ésima de la unidad distinta de 1, entonces $A(z_0)$ es invertible y que se satisface la relación $A(z_0^{-1}) = nA^{-1}(z_0)$ (recuerde que si $z \neq 1$ es raíz n-ésima de la unidad, entonces $\sum_{i=0}^{n-1} z^i = 0$).

23. Sea $M_{n,n}(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices cuadradas de n filas y n columnas, donde n es un entero mayor o igual que 1. Se define la función $T : M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ en toda $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ por

$$T(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i}.$$

donde $A_{i,i}$ es el coeficiente i-ésimo de la diagonal de A.

Sean $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. (i) Probar que $T(A+B) = T(A) + T(B)$.

(ii) Probar que $T(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot T(A)$.
(iii) Probar que $T(A \cdot B) = T(B \cdot A)$.
(iv) Sea $P \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ invertible. Probar que $T(A) = T(P \cdot A \cdot P^{-1})$.
(v) Probar que $T(A \cdot A^T) \geq 0$, y que $T(A \cdot A^T) = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

24. (i) Sean $L_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ el eje de las x y $L_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ la recta que pasa por los puntos $(1,2,0)^t$ y $(-1,3,-1)^t$. Encuentre una tercera recta $L_3 \subseteq \mathbb{R}^3$ que sea perpendicular a L_1 y a L_2 y que además intersecte a estas dos rectas.
(ii) Sea π el plano de $\mathbb{R}^3$ de ecuación cartesiana $x+y+z=1$ y sea P el origen en $\mathbb{R}^3$. Calcular el punto $Q \in \mathbb{R}^3$ simétrico de P con respecto a π.

25. Considere el plano π_1 de ecuación cartesiana $-3x_1 - x_2 + 2x_3 = \phi_1$, el plano π_2 de vector normal $(2,1,-1)^t$ que pasa por el punto $(0,0,\phi_2)^t$, y el plano π_3 perpendicular al vector $(1-\phi_3, 1, (\phi_3-4)/2)^t$ que contiene al punto $(0,0,1)^t$.

Determine las condiciones que deben satisfacer ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 de modo que,

(i) π_1, π_2, π_3 no se intersecten,
(ii) π_1, π_2, π_3 se intersecten en un punto, y
(iii) π_1, π_2, π_3 se intersecten en una recta.

26. Sean $a, d \in \mathbb{R}$ y los planos $\pi_1 : 3x + 5y + z + 2 = 0$, y $\pi_2 : ax + 15y + 3z + d = 0$.
(i) Encuentre condiciones sobre a y d para que los planos se corten.