MA11B-01 Álgebra Lineal
Examen.

Prof: Francisco Ortega
Aux: Alejandro Omón

8 Agosto 1997

Problema 1. Sea el sistema lineal

$$\begin{aligned}(1-\beta)x_1+\beta x_2+2\beta x_3+2\beta x_4&=0\\(\beta-1)x_1+(2-2\beta)x_2-2\beta x_3-2\beta x_4&=0\\(1-\beta)x_1+\beta x_2+(2+\beta)x_3+(1+2\beta)x_4&=0\\(\beta-1)x_1-\beta x_2-2\beta x_3+(2-2\beta)x_4&=0\end{aligned}$$

(i)(4pts.) Determinar los valores de β tales que: el sistema tiene solución única en $\mathbb{R}^4$, el sistema tiene infinitas soluciones en $\mathbb{R}^4$ y el sistema no tiene solución en $\mathbb{R}^4$. Encuentre las soluciones que aparecen en cada caso.

(ii)(2pts.) Calcule la inversa de la matriz de coeficientes cuando ésta exista.

Problema 2. Sean V, W un espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ y $B_V=\{v_i\}_{i=1}^4$, $B_W=\{w_i\}_{i=1}^5$ bases de V y W respectivamente.

Sea $T: V\to W$ una transformación lineal tal que su matriz representante con respecto a las bases B_V y B_W está dada por:

$$\begin{bmatrix}1&2&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&3\\0&0&1&1\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

(i) Calcule bases de $Ker(T)$ e $Im(T)$.

(ii) Dado $v\in V$, definido por $v=\sum_{i=1}^4\lambda_i v_i$ con $\lambda_i\in\mathbb{R}$ para $i=1,2,3,4$.
Calcule $T(v)$, si $\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=2, \lambda_4=1$.

(iii) Si ahora $T' : V \to V$ con $B = \{v_i\}_{i=1}^4$ la base en el dominio y $B' = \{v_1, v_1 - v_3, v_1 + 2v_3 - v_4, v_2 + v_4\}$ es la base en el espacio de llegada, tiene como matriz representante

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcula la matriz representante de T' si se considera B' como base del dominio y B como base del espacio de llegada.

Problema 3. **(i)** Sea $A \in M_2(I\!R)$ una matriz cuyos valores propios son $\lambda_1 = a + bi$ y $\lambda_2 = a - bi$, y los vectores propios asociados son $v_1 = x + yi$, $v_2 = x - yi$, $x, y \in I\!R^2$. Muestre que existe una base real de vectores de $I\!R^2$ tales que la matriz exponencial de D esta dada por:

$$e^D = \begin{bmatrix} e^a \cos(b) & e^a \sin(b) \\ -e^a \sin(b) & e^a \cos(b) \end{bmatrix}$$

Hint: Recuerde que $e^{\theta i} = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$.

(ii) Usando lo anterior, encuentre la expresión diagonal real de la matriz exponencial de:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Problema 4. Encuentre la forma de Jordan de la matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

especificando una base de vectores propios generalizados de $I\!R^4$ y la forma que tiene la matriz diagonal con respecto a la base anterior.

Observación: Elija 3 de las 4 preguntas.

Tiempo: 3:00 Hrs.