Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 19 de Abril del 2001. Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL 1

MA12A CALCULO 2001

Problema 1.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente.

(i) (1.5 ptos.) Demuestre que si A satisface

$$\forall x \in A, \exists y \in A, x < y \tag{1}$$

entonces A posee supremo pero no máximo.

(ii) (1.5 ptos.) Demuestre que si A satisface

$$\exists y \in A, \forall x \in A, x \leq y \tag{2}$$

entonces A tiene máximo.

(iii) (1.5 ptos.) Encuentre dos intervalos en $\mathbb{R}$ que sean acotados superiormente y que verifiquen (1) y (2) respectivamente.

(iv) (1.5 ptos.) Pruebe que si $B \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto inductivo entonces satisface (1), es decir,

$$\forall x \in B, \exists y \in B, x < y$$

Problema 2.

(i) (2.0 ptos.) Utilizando sólo los axiomas de cuerpo de los números reales, demuestre que:

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a, b \neq 0,\ (a+b)(a^{-1}b^{-1}) = a^{-1} + b^{-1}$$

En cada paso indique claramente cuál axioma está utilizando.

(ii) (2.0 ptos.) Demuestre que

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a, b > 0,\ (a+b)(a^{-1} + b^{-1}) \geq 4$$

En cada paso indique qué axiomas o propiedades del orden está utilizando.

(iii) (2.0 ptos.) Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{|x^2 - 2x + 1|}{|x^2 - 3x + 2|} \leq 1$$

Problema 3.

Sean $P = (1, 0)$, $Q = (0, 1)$ y $R = (0, 0)$ tres puntos en el plano y consideremos α, β, γ y μ cuatro números reales conocidos cualesquiera. Determine el lugar geométrico de los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$\alpha d((x, y), P)^2 + \beta d((x, y), Q)^2 + \gamma d((x, y), R)^2 = \mu$$

Indicación: Analice cuidadosamente todos los casos posibles, distinguiendo en particular los siguientes: (i) $\alpha + \beta + \gamma = 0$, y (ii) $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.