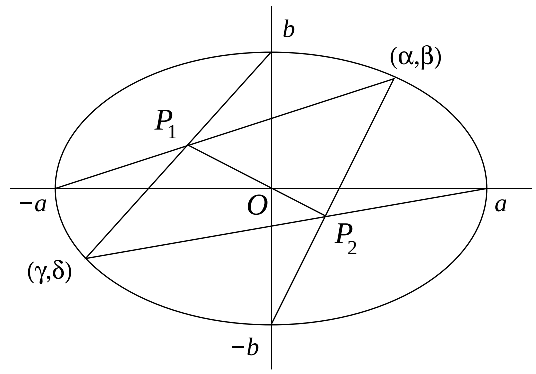
Control #1 MA12A Cálculo

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2002

Puntuación: P1.- (i)1, (ii)1, (iii)1, (iv)3, P2.- (i)2, (ii)2, (iii)2, P3.- (i)3, (ii)3.

P1.- En la elipse de semiejes $a > 0$, $b > 0$ centrada en el origen O, el punto (α, β), con $0 < \alpha < a$, $0 < \beta < b$ es un punto cualesquiera de la elipse en el primer cuadrante y el punto (γ, δ), con $-a < \gamma < 0$, $-b < \delta < 0$ es un punto cualesquiera de la elipse en el tercer cuadrante. El objetivo de esta pregunta es demostrar que el segmento que une P_1 con P_2 contiene al origen.



(i) Si $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, de la figura es claro que $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq 0$ y $x_2 \neq 0$. Demuestre que $0 \in \overline{P_1 P_2}$ si $\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2} = 0$.

(ii) Determine cuidadosamente las ecuaciones de las cuatro rectas que definen P_1 y P_2.

(iii) Suponiendo conocidos α, β, γ, δ, determine las coordenadas de P_1 y de P_2.

(iv) Utilizando que (α, β), (γ, δ) están en la elipse, pruebe que $0 \in \overline{P_1 P_2}$.

P2.- **(i)** Usando exclusivamente los axiomas de los reales y mencionándolos claramente cada vez que los use, demuestre que: (si necesita otra propiedad, deberá demostrarla)

$$a \in I\!R, \quad a \cdot a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0.$$

(ii) Usando propiedades elementales de los reales demostradas en clases, demuestre que si $x, y, w, z \in I\!R$, $w \neq 0$, $z \neq 0$, entonces:

$$(xw + yz)^2 = (x^2 + y^2)(w^2 + z^2) \quad \Rightarrow \quad \exists \lambda \in I\!R \text{ t.q. } x = \lambda w,\ y = \lambda z.$$

(iii) Usando propiedades de los reales vistas en clases, demuestre que:

$$\forall a, b \in I\!R \qquad a^3 b + ab^3 \leq a^4 + b^4.$$

P3.- **(i)** Resuelva la inecuación:

$$\frac{|x-2| + |2x+11|}{(x-2)\ |x + |x-2||} < \frac{1}{2}.$$

(ii) Sea b un número real y definamos el conjunto

$$A = \{x \in I\!R \text{ tales que } \ (\forall \varepsilon > 0)\ \ x < b + \varepsilon\}.$$

Pruebe que A es acotado superiormente y que tiene un supremo. Demuestre además que $\sup A = b$ ¿Tiene A un máximo? Justifique claramente todas sus respuestas.