Control #1 MA12A CALCULO

Escuela de Ingeniería,FCFM, U. de Chile.

Semestre 2004-1

P1.- **(i)** En el cuerpo de los números reales se define $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$, $5 = 4 + 1$ y $6 = 5 + 1$. Usando sólo los axiomas de los números reales y el hecho que $2 \neq 0$ pruebe las siguientes afirmaciones, detallando todos los pasos y mencionando el axioma o definición que utiliza en cada uno de ellos:

(a) (0,5 ptos.) $3 + 2 = 5$,

(b) (0,7 ptos.) $3 \cdot 2 = 6$,

(c) (0,8 ptos.) $4 \cdot 2^{-1} = 2$.

(ii) **(a)** (2 ptos.) Demuestre que para todo $x, y \in \mathbb{R}$

$$x^2 + xy + y^2 \geq 0.$$

(b) (2 ptos.) Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Pruebe que si $x^3 + x = y^3 + y$ entonces $x = y$.

P2.- **(i)** (2 ptos.) Encuentre el conjunto solución de la inecuación

$$|x^2 - 2x| + x|x + 3| \geq 3,$$

y expréselo como unión de intervalos.

(ii) (2 ptos.) Encuentre los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad x^2 = \big|2 - a + |a|\big| - 2a|a| - 6a^2.$$

Escriba su respuesta como unión de intervalos.

(iii) (2 ptos.) Sea $A = \{s + t \mid 0 \leq s < 1, \quad 0 \leq t < 1\}$. Muestre que $\sup A$ e $\inf A$ existen. Encuentre $\sup A$ e $\inf A$ justificando su respuesta. Determine si A tiene mínimo.

P3.- Considere una parábola y una recta L que pasa por el foco de ésta. Escoja la posición de la parábola que más le convenga, por ejemplo con directriz vertical o bien horizontal, con el vértice en el origen o bien el foco en el origen. Suponga que L es no vertical de pendiente m y que no es paralela al eje de simetría de la parábola. Denotemos por $p > 0$ la distancia entre el foco y el vértice de la parábola.

(i) (1 pto.) Escriba en términos de p y m una ecuación para la parábola y una para L.

(ii) (1 pto.) Calcule los dos puntos de intersección P y Q de L con la parábola en función de p y m.

(iii) (0,5 ptos.) Encuentre el punto medio A del segmento $\overline{PQ}$.

(iv) (2 ptos.) Pruebe que $dist(A, P) = dist(A, D)$ donde D es la recta directriz de la parábola.

(v) (1,5 ptos.) Pruebe que las rectas tangentes a la parábola en los puntos P y Q son perpendiculares.

TIEMPO: 3 horas.