Departamento de Ingeniería Matemática

Universidad de Chile

CONTROL 1 CALCULO, MA - 12 A, 1997

Problema 1.-

1. (2.0 pts.) Demostrar, utilizando los axiomas de cuerpo de los números reales que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ x, y \neq 0\ (x+y)(x^{-1}y^{-1}) = x^{-1} + y^{-1}$$

   En cada paso diga cual o cuales axiomas o propiedades está utilizando.

2. (2.0 pts.) Demuestre que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x, y > 0\ (x+y)(x^{-1}+y^{-1}) \geq 4$$

   Indique que axiomas o propiedades del orden está utilizando.

3. (2.0 pts.) Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{|x^2-2x+1|}{|x^2-3x+2|} \leq 1$$

Problema 2.-

(a) (2.0 pts.) Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ y $A = \{x \in \mathbb{R} :\ x > 0 \text{ y } \frac{ax}{a+x} \geq 1\}$. Encontrar, si es que existen, ínfimo, supremo, mínimo y máximo de A.

(b) (2.0 pts.) Probar que $\inf\{\frac{1}{2n+1} :\ n \in \mathbb{N}\} = 0$

1. (2.0 pts.) Dada la parábola de ecuación $y^2 = 4p(x-p)$ para $p > 0$ determine los puntos P y Q (P con coordenadas positivas) de ella, de modo que las tangentes a la parábola por estos puntos pasen por el origen. Calcule la distancia de P a la tangente que pasa por Q.

   Indicación: La ecuación de la tangente por un punto $P = (\alpha, \beta)$ a una parábola de ecuación $y^2 = 4p(x-p)$ es $y - \beta = 4p; (\frac{x+\alpha}{2} - p)$.

Problema 3.-

1. (3.0 pts.) Considere la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. La recta $y = \frac{b}{a}x$ intersecta a la elipse en los puntos P y R (P con coordenadas positivas). Determinar el área del rectángulo inscrito en la elipse, que tiene como diagonal el trazo PR y cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados.

2. (3.0 pts.) Considere la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Una recta variable L que pasa por el origen, intersecta a la circunferencia en los puntos Q y S. Determinar, analíticamente, el lugar geométrico de la intersección de las tangentes a la circunferencia por los puntos P y Q.

   Indicación: La ecuación de la tangente por un punto $P = (\alpha, \beta)$ a una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ es: $x\alpha + y\beta = r^2$.

Tiempo: 3 horas
Sin Consultas