Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 11 de Mayo del 2000.

CONTROL 2

MA12A CALCULO 2000

Problema 1.

a) (2.0 pts.) Sea L una recta no vertical de ecuación $y = mx + n$, sean A, B, C y D cuatro puntos de ella y a_1, b_1, c_1 y d_1 sus abscisas, respectivamente ($A = (a_1, a_2)$). Demostrar que

$$d(A, B) = d(C, D) \Leftrightarrow |a_1 - b_1| = |c_1 - d_1|.$$

b) i) (1.0 pto.) Determinar para qué valores de m, un recta L con pendiente m que pasa por el punto $(-1, 0)$ intersecta a la rama derecha de la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 1$.

ii) (1.0 pto.) Deducir que la intersección ocurre en el punto $P = \left(\frac{1+m^2}{1-m^2}, \frac{2m}{1-m^2}\right)$.

c) Sea L la recta de ecuación $y = m(x+1)$, con $m \geq 0$ y tal que L intersecte a la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ en un punto P.

i) (1.0 pto.) Determinar el punto R de la intersección de L con la recta de ecuación $y = -x$ y el punto S la intersección de L con la recta de ecuación $y = x$.

ii) (1.0 pto.) Demostrar que $d((-1, 0), R) = d(S, P)$.

Problema 2. Para la asignación $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}}\right)$ se pide determinar

a) (1.0 pto.) Dominio.

b) (1.0 pto.) Paridad.

c) (1.0 pto.) Acotamiento.

d) (1.0 pto.) Demostrar que el conjunto de todos los ceros de f está dado por $\left\{\frac{\pi k}{\sqrt{1+k^2}} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

e) (1.0 pto.) Probar, usando la definición de convergencia, que la sucesión $x_k = \left(\frac{\pi k}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2$ converge a π^2.

f) (1.0 pto.) Usando sólo lo anterior bosquejar un gráfico de f.

Problema 3.

a) (2.0 pts.) Sea (a_n) una sucesión que converge a 1 y (b_n) una sucesión tal que $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq b_n \leq 1$. Usando la definición de convergencia, demuestre que (b_n) converge a 1.

b) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente.

i) (1.0 pto.) Usando inducción, demostrar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \geq n$.

ii) (1.0 pto.) Usando la definición de convergencia, demostrar que la sucesión $\left(\frac{1}{f(n)}\right)$ converge a cero.

c) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva.

i) (1.0 pto.) Demostrar que, $\forall M \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{n : f(n) \leq M\}$ es finito.

ii) (1.0 pto.) Usando la definición de convergencia, demostrar que la sucesión $\left(\frac{1}{f(n)}\right)$ converge a cero.

Ind: Observe que $\{n : f(n) \leq M\}$ es finito si y sólo si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $f(n) > M$.