Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 17 de Mayo del 2001. Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL 2

MA12A CALCULO 2001

Problema 1.

(a) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x + \beta & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

(a.1) (1 pto.) Demuestre que f es epiyectiva ssi $\alpha \leq \beta$.
(a.2) (1 pto.) Demuestre que f es inyectiva ssi $\alpha \geq \beta$.
(a.3) (1 pto.) ¿Cuál es el conjunto $B = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 | \ f \text{ es biyectiva}\}$?

(b) Sea la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

(b.1) (1.5 ptos.) Pruebe que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leq |x|$.
(b.2) (1.5 ptos.) Sea (u_n) una sucesión convergente a 0. Pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} g(u_n) = 0$.

Problema 2.

(a) (3.0 ptos.) Considere una pirámide regular (caras laterales iguales) de vértice V y que tiene por base un cuadrado $ABCD$ (ver fig. 1). Las caras laterales son triángulos isósceles congruentes de ángulo basal θ. El ángulo entre una cara lateral y la base es ϕ. Se pide calcular $cos\phi$ en función de θ. Indicación: Determine $\overline{OM}$ y $\overline{VM}$ en términos de $\overline{AM}$ y θ, donde M es el punto medio del segmento AB y O es el centro de la circunferencia inscrita en el cuadrado $ABCD$.

(b) (3.0 ptos.) En un triángulo ABC (ver fig. 2) se tiene: $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \dfrac{sen(\alpha+\beta)}{sen(\alpha-\beta)}$. Demuestre que en tal caso el triángulo necesariamente es rectángulo.

Problema 3.

(a) (3 ptos.) Pruebe que si (s_n) es una sucesión que satisface $\forall n \in \mathbb{N}$, $|s_n - s_{n+2}| \geq \frac{1}{2}$, entonces (s_n) no es convergente.

(b) (1.5 ptos.) Sea (u_n) una sucesión que converge a $\frac{1}{2}$. Pruebe que la sucesión (v_n) definida por $v_n = [u_n]$ satisface $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$.

(c) (1.5 ptos.) Sean (u_n) una sucesión creciente y (v_n) una sucesión decreciente tales que $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$. Pruebe que (u_n) y (v_n) convergen y que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.