U. DE CHILE

INGENIERIA

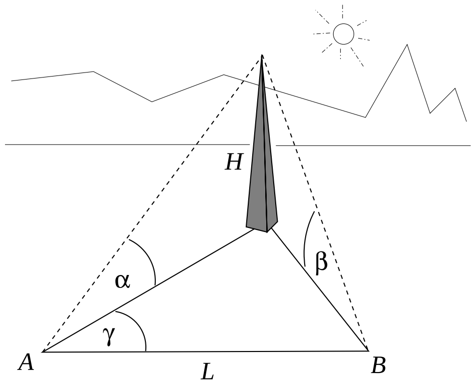
Control #2 MA12A Cálculo

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2002

Puntuación: P1.- (i)3, (ii)3 ; P2.- (i)2, (ii)2, (iii)1; P3.- (i)2, (ii)1, (iii)1.5, (iv)1.5.

P1.- **(i)** La altura H de la torre de la figura es desconocida. Se conocen los ángulos de elevación α y β medidos desde dos puntos A y B del suelo, separados por una distancia $L > 0$ y formando con la base de la torre un ángulo γ. Sabiendo que la torre es vertical respecto del suelo, calcule H en términos de L, α, β, γ en los casos $\alpha = \beta$ y $\alpha > \beta$. (Nota: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \gamma < \pi/2$).



(ii) Resuelva la ecuación: $\cos^3(x) + \sin^3(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\sin(2x)$.
Indicación: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

P2.- Estudie completamente la función

$$f(x) = |\sqrt{|x|} - x|.$$

Para ello:

(i) Encuentre dominio, ceros. Estudie epiyectividad, inyectividad. Demuestre que su recorrido es el conjunto $\{y \in \mathbb{R},\ y \geq 0\}$.

(ii) Analice el crecimiento de la función **sin módulo** $\sqrt{|x|} - x$ para $x > 1/4$, $0 < x < 1/4$ y $x < 0$. Indicación: note que si $x > y > 1/4$ entonces $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 1$.

(iii) Estudie el crecimiento de $|\sqrt{|x|} - x|$ analizando los signos de $\sqrt{|x|} - x$.

(iv) Haga un gráfico aproximado de f que resuma el análisis precedente.

P3.- Para $a > 0$, definimos la sucesión $s_n = \dfrac{1}{\sqrt[n^2]{a}}$, $n \in \mathbb{N}$. (Nota: $\sqrt[n^2]{a} = r \Leftrightarrow a = r^{n^2}$).

(i) Si $0 < a < 1$ pruebe que $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$.
Indicación: defina la sucesión $h_n = s_n - 1$ y muestre que $h_n \to 0$ utilizando que $(1+h)^k \geq 1 + kh$, $\forall h > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ y un teorema de comparación (sandwich).

(ii) Si $a > 1$ o $a = 1$ pruebe que $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$.

(iii) Si $a_n \to L > 0$, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n^2]{a_n}} = 1.$$

(iv) Si $a > b > 0$ calcule:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n^2]{a^n + b^n}}.$$

Indicación: puede usar que $\sqrt[n]{a} \to 1$ si $a > 0$.