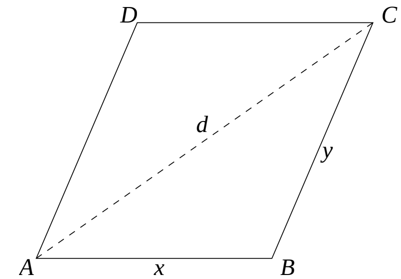
Control # 2
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.
Semestre 2003-1

P1.- **(a)** El paralelógramo $ABCD$ de la figura tiene perímetro $2p$ y su diagonal AD mide d con ángulo opuesto α ($0 < \alpha < \pi$ y $p > d$).



(i) (0.5pto) Si x e y son las longitudes de los trazos AB y BD, establezca que la superficie S del paralelógramo está dada por $S = xy\sin(\alpha)$.

(ii) (1.5pto) Demuestre que $S = \dfrac{p^2 - d^2}{2}\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$. Observación: si usa una identidad trigonométrica no evidente, demuéstrela.

(iii) (1pto) Suponiendo que $x = y$, calcule S en función de p y d solamente.

(b) Resuelva en $\mathbb{R}$ las ecuaciones trigonométricas $\sqrt{2}\cos(x) = a$ para $a \in \mathbb{Z}$ (2pto). Usando lo anterior, encuentre el gráfico de la función $f(x) = [\sqrt{2}\cos(x)]$ (parte entera de $\sqrt{2}\cos(x)$) (1pto).

P2.- **(a)** Calcule los siguientes límites:

(i) (0.75pto) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n-1}{n}\right]$ (parte entera de $\dfrac{n-1}{n}$)

(ii) (0.75pto) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!+1}$.

(b) Considere la sucesión $s_n = \dfrac{2^n + 1}{n^2\, 3^{n+1}}$.

(i) (0.75ptos) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

(ii) (0.75ptos) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{s_n}$.

(c) Se define la sucesión (u_n) por

$$\begin{cases} u_0 = \alpha & \text{donde } \alpha \in (0, \frac{1}{2}) \\ u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n) & \text{para } n \geq 0 \end{cases}$$

(i) (1pto) Encuentre el máximo de la función $g(x) = 2x - x^2$ y a partir de esto demuestre que $\forall n \geq 0$, $u_n \in (0, \frac{1}{2})$.

(ii) (1pto) Pruebe que (u_n) es monótona.

(iii) (1pto) Explique por qué (u_n) es convergente. Calcule su límite. Justifique claramente su respuesta.

P3.- **(i)** (2ptos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función creciente y sea (a_n) una sucesión decreciente y acotada. Demuestre que la sucesión $(f(a_n))$ es convergente.

(ii) (2ptos) Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones tales que $a_n \to \ell$ y $|a_n - b_n| \to 0$. Demuestre usando la definición de convergencia que $b_n \to \ell$.

(iii) (2ptos) Sea (s_n) una sucesión convergente a un real ℓ. Demuestre usando la definición de convergencia que $s_n + s_{n+1} \to 2\ell$.