CONTROL 2

MA12A CALCULO 1999

Problema 1.

1. Considere la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ definida por la recurrencia

$$\begin{aligned} a_1 &= a \in (0,1) \\ a_{n+1} &= a_n\,(2-a_n) \end{aligned}$$

   (a) (1.0 pto.) Demostrar que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x\,(x-2) \leq 1$.

   (b) (1.0 pto.) Usando Inducción demuestre que $\forall n \geq 1$, $a_n \in (0,1)$.

   (c) (1.0 pto.) Demuestre que $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente.

   (d) (1.0 pto.) Enuncie el resultado visto en clases que asegura la existencia del límite de la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ y calcúlelo.

2. Calcule el límite de las siguientes sucesiones.

$$\text{(a) (1.0 pto.) } a_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}}. \qquad \text{(b) (1.0 pto.) } a_n = \frac{\cos(n!)}{n}.$$

Problema 2.

1. (3.0 pts.) Considere una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ que converge a α. Sea $(b_n)_{n\geq 1}$ definido por $b_n = \max\{a_n, a_{n+1}\}$. Usando la **definición de convergencia** demostrar que la sucesión $(b_n)_{n\geq 1}$ converge a α.

2. Considere una función $f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ que satisface $\forall x > 0,\quad 1-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq x-1$.
   (a) (1.5 pts.) Demostrar que la sucesión $\left(f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)_{n\geq 1}$ converge a 0.
   (b) (1.5 pts.) Analice la convergencia de la sucesión $\left(nf\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)_{n\geq 1}$.

Problema 3.

1. (1.0 pto.) Demuestre que $\forall\ \beta,\gamma \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes igualdades

   (a) $\operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\gamma) = \frac{1}{2}\left(\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma)\right)$ (b) $\cos(\beta)\operatorname{sen}(\gamma) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(\beta+\gamma) + \operatorname{sen}(\beta-\gamma)\right)$.

2. (1.0 pto.) Sea $\alpha \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Se definen S_n y T_n por

$$S_n = \operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(2\alpha) + \cdots + \operatorname{sen}(n\alpha) \quad \text{y} \quad T_n = \cos(\alpha) + \cos(2\alpha) + \cdots + \cos(n\alpha).$$

   Defina $U_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\left(k\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)$. Pruebe que $U_n = S_n \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + T_n \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

3. (1.5 pts.) Pruebe que se cumplen las siguientes igualdades

   (a) $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) S_n = \frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(n\alpha+\frac{\alpha}{2}\right)\right\}$ (b) $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) T_n = \frac{1}{2}\left\{\operatorname{sen}\left(n\alpha+\frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}$.

4. (1.0 pto) Usando las partes anteriores demuestre que las sucesiones (S_n), (T_n) y (U_n) son acotadas.

5. (1.5 pts.) Calcule el siguiente límite $\lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k$.