Control 2 MA12A Calculo
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2005-1 (2 de Junio)

P1. Sea $f : A \subseteq I\!R \to I\!R$ definido por $f(x) = |x| - \sqrt{1-x^2}$. Se pide:

i) Determinar $A =$ Dom f, recorrido, paridad.
ii) Ceros de f, signos de f.
iii) Zonas de crecimiento y de decrecimiento.
iv) Muestre que f no es inyectiva ni sobreyectiva.
v) Determine el mayor conjunto $B, B \subseteq A =$ Dom f tal que $f : B \to f(B)$ sea biyectiva y calcule $f^{-1}(x)$.
vi) Bosqueje el gráfico de f y $|f|$.

P2. a) Una persona P ubicada en un acantilado a una altura h sobre el nivel del mar, ve un globo estático G con un ángulo de elevación α y su sombra S en el agua con un ángulo de depresión β. Si en el momento de la observación se sabe que la inclinación de los rayos solares es γ, se pide calcular la altura H del globo sonre el mar en función de α, β, γ y h (ver figura). **(4.0 ptos.)**

b) Resuelva la ecuación

$$\frac{1 - t_y x}{1 + t_y x} = 1 + \operatorname{sen} 2x$$ **(2,0ptos.)**

P3. a) Considere las sucesiones $(a_n)_{n \in I\!N}$ y $(b_n)_{n \in I\!N}$ definidas recursivamente por:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + b_n \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} b_0 = 1 \\ b_{n+1} = a_n + a_{n+1} \end{cases}$$

Queremos estudiar el comportamiento de $\left(\frac{b_n}{a_n}\right) n \in I\!N$. Para ello:

i) Pruebe, usando inducción que $a_n \geq 2^n \quad \forall n \in I\!N$ y utilicelo para demostrar que $\frac{1}{a_n} \to 0$.
ii) Demuestre que $\forall n \in I\!N : 2a_n^2 = b_n^2 + (-1)^n$ (use inducción).
iii) Demuestre que $\frac{b_n}{a_n} \to \sqrt{2}$, usando (i) y (ii). **(3.0 ptos.)**

b) i) Calcule $\lim\limits_{n \to \infty} n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)$.
ii) Demuestre que $\forall b \in I\!R, b$ fijo, $\frac{b^n}{n!} \to 0$.
iii) Demuestre que la sucesión definido por $v_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ es convergente (Indicación: Calcule $\frac{v_{n+1}}{v_n}$)
iv) Se sabe que $u_n = \frac{3n+5}{n-5} \to 3$. Dado $\varepsilon =$0.01, se pide determinar un $n_0 \in I\!N$ tal que para todo $n > n_0$ $u_n \in (3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon)$ **(3.0 ptos.)**