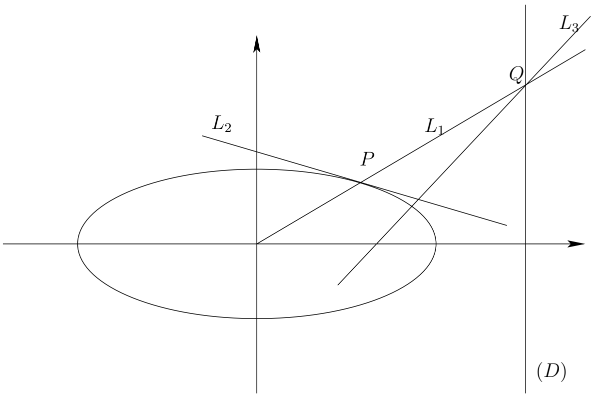
MA12A- Cálculo I
Control 2 - Año 2006

Fecha: Sábado 27 de Mayo de 2006
Tiempo: 3 horas

Solución Problema 1. La recta L_1 pasa por el origen $O = (0,0)$ y por el punto $P(x_0, y_0)$ por lo tanto su ecuación es



$$L_1 : y = \frac{y_0}{x_0} x$$

La recta L_2 está dada en la indicación y tiene pendiente

$$m_2 = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}$$

El punto Q está en la intersección de la recta L_1 y la directriz de ecuación $x = \frac{a}{e}$. Por lo tanto

$$Q = \left(\frac{a}{e}, \frac{y_0 a}{x_0 e}\right)$$

La recta L_3 pasa por Q y es perpendicular a L_2. Por lo tanto su pendiente es:

$$m_3 = -\frac{1}{m_2} = \frac{y_0 a^2}{x_0 b^2}.$$

Así su ecuación resulta

$$L_3 : y - \frac{y_0 a}{x_0 e} = \frac{y_0 a^2}{x_0 b^2}(x - \frac{a}{e}).$$

Esta recta corta al eje OX en la abscisa

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{e} - \frac{y_0 a}{x_0 e} \cdot \frac{x_0 b^2}{y_0 a^2} \\ &= \frac{a}{e} - \frac{b^2}{ae} \\ &= \frac{a^2 - b^2}{ae} \\ &= \frac{a^2 e^2}{ae} \\ &= ae, \end{aligned}$$

que corresponde a la abscisa del foco derecho de la elipse.

Solución Problema 2.

(a) Consideremos la función

$$f(x) = |1 - 2\cos(x + \pi)| - 1.$$

El dominio de la función f es todo $\mathbb{R}$.

Los ceros de f son las soluciones de la ecuación

$$|1 - 2\cos(x + \pi)| = 1$$

es decir

$$1 - 2\cos(x + \pi) = \pm 1,$$

que corresponde a

$$\cos(x + \pi) = \frac{1 \pm 1}{2}.$$

Así, los ceros son

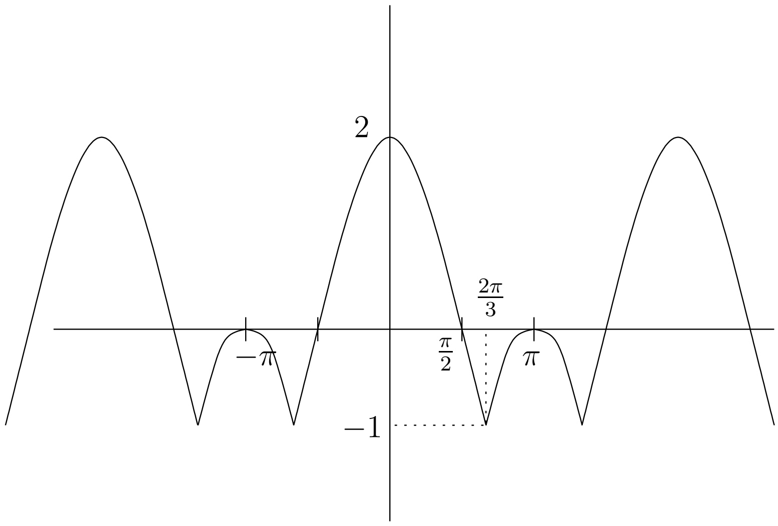
$$x = (2k + 1)\frac{\pi}{2} \text{ o bien } x = 2k\pi + \pi, \text{ donde } k \in \mathbb{Z}.$$

Respecto a la paridad, se tiene que $\cos(-x + \pi) = \cos(x - \pi) = \cos(x + \pi)$, por lo tanto la función es par.

Respecto a la periodicidad, la función tiene período 2π al igual que la función coseno.

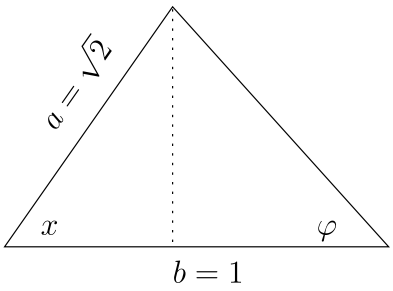
El gráfico se realiza para $x \in [0, \pi]$ y se repite por paridad a $[-\pi, \pi]$ y luego por periodicidad a todo $\mathbb{R}$.

Para hacer el gráfico se debe decir que $f(0) = 2$ y que $|1 - 2\cos(x + \pi)| = 0$ en $[0, \pi]$ cuando $x = 2\pi/3$. Allí la función alcanza su mínimo igual a -1.



Del gráfico se aprecia que $\mathrm{Rec}(f) = [-1, 2]$.

(b) El triángulo es de la forma:



i) Del esquema se deduce que

$$\tan\varphi = \frac{a\text{sen}x}{b - a\cos x} = \frac{\sqrt{2}\text{sen}x}{1 - \sqrt{2}\cos x}$$

ii) Para que $\tan\varphi = 1$, el ángulo x debe ser solución de la ecuación

$$\sqrt{2}\text{sen}x = 1 - \sqrt{2}\cos x,$$

es decir

$$\sqrt{2}\text{sen}x + \sqrt{2}\cos x = 1.$$

Para resolver esta ecuación conviene dividir por 2, e identificar el seno de $x + \pi/4$, del modo siguiente:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{1}{2},$$

es decir,

$$\text{sen}(x + \frac{\pi}{4}) = \text{sen}(\frac{\pi}{6}).$$

De aqui se deduce que

$$x = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}$$

De todas estas soluciones, la que está en $[0, \pi]$ se obtiene cuando $k = 1$, es decir,

$$x = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4}$$

Solución Problema 3.

(a) i) Debemos demostrar que

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_0,\ \text{se cumple que } \left|\frac{n}{n+2} - 1\right| \leq \varepsilon.$$

Comenzamos estudiando el módulo:

$$\begin{aligned}\left|\frac{n}{n+2} - 1\right| &= \frac{2}{n+2}\\ &\leq \frac{2}{n}\end{aligned}$$

De este modo la proposición que debe demostrarse es

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_0,\ \text{se cumple que } \frac{2}{n} \leq \varepsilon,$$

la que es consecuencia directa de la propiedad arquimediana (tomando $\varepsilon/2$.)

ii) Debemos encontrar un valor de $\underline{N_0 \in \mathbb{N}}$ que garantice que $\forall n \geq N_0$ se cumpla $S_n \in [1 - 10^{-8}, 1 + 10^{-8}]$
Es decir, en la definición debemos estudiar el caso $\varepsilon = 10^{-8}$. En este caso, la inclusión anterior es equivalente a la desigualdad

$$\frac{2}{n} \leq 10^{-8},$$

es decir

$$n \geq \frac{10^8}{2},$$

la cual se cumple a partir de $N_0 = 5 \cdot 10^7$.

(b) (*1pto.*) Se sabe que la sucesión (a_n) converge al real ℓ.Es decir Usando la definición de convergencia, demuestre que la sucesión (b_n) definida por $b_n = a_{2n}$ es también convergente al mismo real ℓ.

Sabemos que la sucesión (a_n) converge al real ℓ. Es decir,

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_0,\ \text{se cumple que } |a_n - \ell| \leq \varepsilon. \qquad \text{(DATO 1)}$$

Debemos probar que

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_0,\ \text{se cumple que } |a_{2n} - \ell| \leq \varepsilon.$$

En efecto, dado $\varepsilon > 0$, el (DATO 1) indica que $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ a partir del cual se cumple $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Como en general $2n \geq n$ entonces para el mismo N_0 se tendrá que $\forall n \geq N_0$ $|a_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$.

(c) i) Como la sucesión (u_n) es creciente, se tiene que

$$u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \leq u_{n+1}.$$

Por lo tanto

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \leq (u_{n+1} + u_{n+1} + \cdots + u_{n+1}) = nu_{n+1}.$$

ii) Para probar que la sucesión (w_n) es creciente, restamos $w_{n+1} - w_n$. Se obtiene

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} \\ &= \frac{1}{n(n+1)}\Big(n(u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1}) - (n+1)(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)\Big) \\ &= \frac{1}{n(n+1)}\Big(nu_{n+1} - (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)\Big) \end{aligned}$$

Esta diferencia es ≥ 0 en virtud de la propiedad probada en la parte anterior.

ii) Para probar que la sucesión (w_n) es convergente basta con probar que es acotada superiormente. De este modo, el teorema de las sucesiones monótonas acotadas entrega la convergencia.

Para probar que la sucesión (w_n) es acotada superiormente, usamos que (u_n) lo es y que M es una cota superior de (u_n).

Así se obtiene que

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} \\ &\leq \frac{M + M + \cdots + M}{n} \\ &= M. \end{aligned}$$