Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 21 de Junio del 2001. Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL 3

MA12A CALCULO 2001

Problema 1. Sea (a_n) una sucesión decreciente y convergente a 0. Se define la sucesión

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

(a) (1.5 pts.) Pruebe que (s_{2n}) es decreciente.

(b) (1.5 pts.) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \geq n$, $0 \leq s_{2n} - s_{2m} \leq a_{2n}$.

(c) (1.5 pts.) A partir de lo anterior, deduzca que (s_{2n}) satisface el criterio de Cauchy.

(d) (1.5 pts.) Usando (c), pruebe que (s_{2n+1}) es convergente y concluya que (s_n) converge.

Problema 2.

(a) (1.0 pto.) Sea $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\bar{x} = 0$ y tal que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $h\left(\frac{1}{n}\right) > 0$. Demuestre que $h(0)$ no puede ser estrictamente negativo.

(b) (2.5 pts.) Sea $g\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función que satisface $g(x \cdot y) = g(x) + g(y)$. Demuestre que si g es continua en $\bar{x} = 1$ entonces g es continua en todo su dominio.
<u>Indicación</u>: demuestre primero que $g(1) = 0$.

(c) (2.5 pts.) Sean $h, g\colon [0,1] \to [0,1]$ continuas con $h(0) = 0$ y $g(1) = 0$. Demuestre que existe $c \in [0,1]$ tal que $h(c) = g(c)$.

Problema 3. Dado $a \geq 0$, sea $f_a(x) = ax^3 + x - 1$.

(a) (3 pts.) Demuestre la existencia y unicidad de $z \in [0,1]$ tal que $f_a(z) = 0$.

(b) (3 pts.) Sea $g\colon [0, \infty) \to [0,1]$ la función que a cada $a \geq 0$ le asocia la solución $z \in [0,1]$ de la ecuación $f_a(z) = 0$. Pruebe que g es continua.

<u>Indicación</u>: puede ser útil demostrar que si

$$\begin{aligned} au^3 + u - 1 &= 0 \\ bv^3 + v - 1 &= 0 \end{aligned}$$

con $a, b \geq 0$, entonces

$$[b(u^2 + uv + v^2) + 1](u - v) = u^3(b - a).$$