



Control #3 MA12A Cálculo
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.
Año 2002

Puntuación: P1.- (i)2, (ii)2, (iii)2, P2.- (ia)2, (ib)2, (ii)2, P3.- (i)1.5, (ii)1.5, (iii)1.5, (iv)1.5.

P1.- Sea $a > 0$. Considere la sucesión definida por

$$\begin{cases} s_1 = 2a, \\ s_{n+1} = \sqrt{\frac{a^3 + s_n^2}{a + 1}}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

- (i) Demuestre por inducción que $s_n > a, \forall n \geq 1$.
- (ii) Demuestre que s_n es estrictamente decreciente y convergente a un real L .
- (iii) Encuentre el valor de L . Justifique rigurosamente su resultado.

P2.- Sea $a > 0$.

(i) **Utilizando** las desigualdades

$$\exp(x) \leq \frac{1}{1-x} \quad \forall x < 1, \quad 1+x \leq \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

estudie en los dos casos siguientes la convergencia de la sucesión

$$\exp\left(-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2}\right).$$

- (a) Si $s_n \rightarrow a$ con $s_n < a$,
 - (b) Si $s_n \rightarrow -a$ con $s_n > -a$.
- (ii) Determine si existen valores de α y de β para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{x}{a^2 - x^2}\right) & \text{si } -a < x < a \\ \alpha & \text{si } x \leq -a \\ \beta & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

sea continua en $x = -a$ y/o $x = a$. Justifique claramente su respuesta.

Indicación: en esta parte puede usar la caracterización de continuidad por sucesiones o por límites.

P3.- Definimos la función en \mathbb{R}

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

- (i) Verifique que \tanh es continua en todo \mathbb{R} , que $\tanh(0) = 0$ y que satisfice $-1 < \tanh(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

- (ii) Pruebe que si $n \rightarrow \infty$ entonces $\tanh(n) \rightarrow 1$ y que $\tanh(-n) \rightarrow -1$.
- (iii) Usando el Teorema del Valor Intermedio para funciones continuas (T.V.I.) demuestre que $\forall y \in]-1, 1[, \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $\tanh(x) = y$.
Indicación: analice separadamente los casos $y > 0$, $y = 0$, $y < 0$.
- (iv) Demuestre que la ecuación $\tanh(x) = \cos(x)$ tiene infinitas soluciones en \mathbb{R} .
Indicación: use nuevamente el T.V.I.