Control #3 MA12A CALCULO

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Semestre 2003-1

P1.- **(i)** (3 ptos.) Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ (x-\alpha)^2 & \text{si } x < 0 \\ \beta & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Analice la continuidad de f y encuentre todos los valores de α y β para los cuales f es continua en todo $\mathbb{R}$.

(ii) (3 ptos.) Calcule

$$\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{arcsen} x - \operatorname{arcsen} a}{x - a}$$

en función de a, usando el cambio de variables $u = \operatorname{arcsen} x - \alpha$, donde $\alpha = \operatorname{arcsen} a$. Indicación: puede serle útil la fórmula del seno de la suma.

P2.- **(i)** Sean $f, g : [0,1] \to [0,1]$ funciones continuas y epiyectivas. Demuestre que $\exists c \in [0,1]$ tal que $f(c) = g(c)$. Indicación: analice los valores de g en los puntos donde f alcanza sus valores extremos.

(ii) (3 ptos) El objetivo de este problema es probar que toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y tal que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq |x|$, alcanza su mínimo en $\mathbb{R}$, es decir,

$$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(a) \leq f(x).$$

Para ello considere $y_0 = f(0)$ y el intervalo $I = [-y_0, y_0]$.

(a) (1.5 ptos) Demuestre que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus I, \quad f(x) > y_0.$$

(b) (1.5 ptos) Concluya que f alcanza su mínimo en $\mathbb{R}$ en un punto de I.

P3.- **(i)** (3 ptos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Sea (a_n) una sucesión en $[a,b]$, no necesariamente convergente, tal que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$. Demostrar que $\exists \overline{x} \in [a,b]$ tal que $\ell = f(\overline{x})$.

(ii) **(a)** (1 pto) Sea $k \in \mathbb{N}$. Usando subsucesiones, calcular

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^n.$$

(b) (2 ptos) Dado $a \in \mathbb{R}$, calcular

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n+a}\right).$$

Use este resultado para concluir el valor de $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+a}\right)^n$.