

Control 3, MA12A, Otoño 1996

Problema 1. Calcule el límite de las siguientes sucesiones

1. (1.5 pts.) $U_n = \frac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}}$, $0 < a \leq b$. Distinga los casos $a = b$ y $a < b$.
2. (1.5 pts.) $U_n = (1 - \frac{1}{n-2})^{n+4}$.
3. (1.5 pts.) $U_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$.
4. (1.5 pts.) $U_n = \frac{n - \operatorname{sen}(n)}{n^2 - 16}$.

Problema 2.

Sean (a_n) y (b_n) sucesiones definidas por la recurrencia

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$
$$b_{n+1} = \frac{b_0}{a_0} \sqrt{a_n b_n}$$

con $a_0 > b_0 > 0$.

1. (2.0 pts.) Pruebe que (a_n) es decreciente. Concluya que (b_n) es decreciente.
2. (2.0 pts.) Muestre que (a_n) y (b_n) son acotadas inferiormente. Concluya que (a_n) y (b_n) son convergentes.
3. (2.0 pts.) Calcule los límites de (a_n) y (b_n) .

Ind: Para probar que (a_n) es decreciente muestre que $\forall n \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Para ello observe que $\frac{b_n}{a_n} = \frac{b_0}{a_0}$.

Problema 3.

1. Analice la convergencia de las siguientes sucesiones, estudiando sus puntos de acumulación.
 - (a) (1.0 pto.) $(1 + \frac{1}{n})^{(-1)^n n}$.
 - (b) (1.0 pto.) $\cos(\frac{n\pi}{2})$.
 - (c) (1.0 pto.) $\sum_{k=0}^n (-1)^k$.
2. (3.0 pts.) Sea (U_n) creciente y a un punto de acumulación. Pruebe que (U_n) es convergente y que $\lim U_n = a$.

Ind: Muestre que a es cota superior de (U_n) .