Departamento de Ingeniería Matemática

Universidad de Chile

CONTROL 3 CALCULO, MA - 12 A, 1997

Problema 1.- Analizar la convergencia de las siguientes sucesiones.

1. (1.5 pts.) $\left(\frac{n^3}{2n^2+1} - \frac{n^2}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$
2. (1.5 pts.) $\left(\frac{4n+\frac{1}{3}}{4n+1}\right)^n$
3. (1.5 pts.) $\left(\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{a^n+b^n}\right)$, con $a > b > 0$.
4. (1.5 pts.) $\frac{(-n)^{n+1}}{(n+1)^n}$

Problema 2.-

Considere la sucesión (s_n) definida por la recurrencia

$$s_{n+1} = \sqrt{\frac{a^3 + s_n^2}{a+1}}$$

con $a > 0$ y $s_1 = a$.

1. (2.0 pts.) Demuestre, usando inducción, que $\forall n \in \mathbb{N} \;\; s_n \geq a$.
2. (2.0 pts.) Muestre que (s_n) es decreciente y concluya que su límite existe.
3. (2.0 pts.) Calcule este límite.

Problema 3.-

1. (2.0 pts.) Sea $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ una función que satisface
$$h(x \cdot y) = h(x) + h(y)$$
Muestre que si h es continua en $x = 1$ entonces es continua en todo punto de su dominio. (ind: Demuestre que $h(1) = 0$).
2. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones que satisfacen la relación
$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad f(x) \geq f(y) + g(y)(y - x)$$
   (a) (1.0 pto.) Muestre que:
$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad g(x)(y-x) \geq f(x) - f(y) \geq g(y)(y-x)$$
   (b) (1.5 pts.) Probar que si g es una función acotada entonces f es continua en todo $\mathbb{R}$.
   (c) (1.5 pts.) Probar que si g es continua en a y a_n es una sucesión que converge a a, $a_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a}$$
   existe y vale $-g(a)$.

Tiempo: 3 horas
Sin Consultas