CONTROL 3

MA12A CALCULO 1999

Problema 1.

1. (2.0 pto.) Estudiar la convergencia de la sucesión $\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n$.
2. (2.0 pto.) Estudiar la convergencia de la sucesión $\frac{(-n)^n}{(n-1)^{n+1}}$.
3. (2.0 pto.) Dados a, b, c reales positivos resolver la ecuación

$$\log_{x^2} a + \log_x b = c.$$

Problema 2.

1. Considerar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} xsen\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

   (a) (1.5 pts.) Estudiar la continuidad de f para $x \neq 0$.

   (b) (1.5 pts.) Demostrar, usando la **definición de continuidad**, que f es continua en $x = 0$.

2. Sea (a_n) una sucesión creciente que admite un punto de acumulación α.

   (a) (1.5 pts.) Probar que α es una cota superior de (a_n).

   (b) (1.5 pts.) Demostrar que (a_n) converge a α.

Problema 3.

1. (3.0 pts.) Demostrar, utilizando el Teorema del Valor Intermedio que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$x^{179} + \frac{163}{1 + x^2 + sen^2(x)} = 119.$$

2. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Para $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ se define

$$g(x) = f\left(x + \frac{1}{k}\right) - f(x).$$

   (a) (1.0 pto.) Demostrar que $\sum\limits_{i=0}^{k-1} g\left(\frac{i}{k}\right) = f(1) - f(0)$.

   (b) (0.5 pts.) Si $\forall x \in \left[0, 1 - \frac{1}{k}\right]$, $g(x) > 0$ demostrar que $f(1) > f(0)$.

   (c) (0.5 pts.) Si $\forall x \in \left[0, 1 - \frac{1}{k}\right]$, $g(x) < 0$ demostrar que $f(1) < f(0)$.

   (d) (1.0 pto.) Si $f(1) = f(0)$ demostrar que existe $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{k}\right]$ tal que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{k}\right)$.