Control #3 MA12A CALCULO

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Semestre 2004-1

P1.- **(i)** Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin((1-a)x)}{x} & \text{si } x < 0, \\ b(x-a)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ \dfrac{\sin(a(x-1))}{\ln x} & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

donde a y b son parámetros reales con $a \neq 0$, $a \neq 1$.

a) (0.5 ptos.) ¿Qué puede decir de la continuidad de f en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0,1)$ y $(1,\infty)$? Justifique.

b) (1.5 ptos.) Encuentre una relación entre a y b equivalente a la continuidad de f en 0.

c) (1.5 ptos.) Encuentre una relación entre a y b equivalente a la continuidad de f en 1.

d) (0.5 ptos.) Encuentre los valores de a y b, con $a \neq 0$, $a \neq 1$, tales que f sea continua en $\mathbb{R}$.

(ii) (2 ptos.) Estudie la continuidad en los puntos 0 y 1 de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = [x]x$.
(Recuerde que $[x]$ es la parte entera de x, definida como el mayor entero k que cumple $k \leq x$.)

P2.- Calcule los límites siguientes justificando apropiadamente (1 pto. cada uno):

(i) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h}$, $a \in \mathbb{R}$ **(ii)** $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x)}{\pi - x}$ **(iii)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{e^{x^2}-1}$

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^a} - \sqrt{1-x^a}}{x^a}$, $a > 0$ **(v)** $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{-\frac{x}{\ln x}}$ **(vi)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{1+2n}\right)^n$

P3.- **(i)** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$.

a) (2 ptos.) Pruebe que existen $\underline{x}$, $\overline{x} \in [a,b]$ tales que

$$f(\underline{x}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f(\overline{x}) \qquad \forall x_1, x_2 \in [a,b].$$

b) (2 ptos.) Demuestre que dados x_1, $x_2 \in [a,b]$ cualesquiera existe $\beta \in [a,b]$ tal que

$$f(\beta) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

<u>Indicación</u>: utilice los teoremas sobre funciones continuas en un intervalo $[a,b]$.

(ii) (2 ptos.) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface:

$f(x) \leq 0 \quad \forall x \leq 0,$

$f(x) \geq 1 \quad \forall x > 0.$

Pruebe que f no es continua en cero.

TIEMPO: 3 horas.