Control 3 MA12A Cálculo
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2005-1 (30 de Junio)

P1. a) Considere la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\beta}(1-e^{x})\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

i) Justifique porque f es continua $\forall x \in I\!R - \{0\}, \forall \beta \in I\!R$. **(1.0 pto.)**

ii) Pruebe que si $\beta > -1$, entonces f es continua $\forall x \in I\!R$. **(2.0 ptos.)**

iii) Para $\beta = -1$, utilice la sucesión $x_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$ para probar que f no es continua en $x = 0$. Justifique. **(1.0 pto.)**

b) Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = ln\ a, a > 0$ y úselo para calcular $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{ln(1+x)}$ **(2.0 ptos.)**

P2. a) Para la función $f(x) = 1 + x\ e^{1/x}$, encuentre

i) Su asíntota oblicua. **(1.5 ptos.)**

ii) (1) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, (2) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, (3) Asíntotas verticales de f, si las hay. **(1.5 ptos.)**
(Indicación: Para (2) haga $x = \frac{1}{t}$ y use $e^t > t^2 \quad \forall t \in I\!R^+$)

iii) Demuestre que $\exists x_0 \in [-2, -1]$ t.q. $f(x_0) = 0$. Justifique. **(1.0 pto.)**

b) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{a|x| + \mathrm{sen}\,\pi x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ b & \text{si } x = 0 \end{cases}$
Calcule los límites laterales $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ y encuentre los valores de a y b para que f sea continua en $x = 0$. **(2.0 ptos.)**

P3. i) Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$, $a < b$ y tales que $f(a) \neq f(b)$, $f(a) = -g(b)$ y $f(b) = -g(a)$.
Pruebe que $\exists x_0 \in [a, b]$ t.q. $f(x_0) = -g(x_0)$ y para $f(x) = (x - a)^n$ y $g(x) = -(b - x)^n$ con $n \in I\!N - \{0\}$, verifique que se cumplen las hipótesis anteriores y calcule, para este caso, el valor de $x_0 \in [a, b]$ **(3.0 ptos.)**

ii) Considere F y G continuas en x_0 y tales que $F(x_0) < G(x_0)$.
Demuestre que $\exists \delta > 0$ t.q. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $F(x) < G(x)$. **(1.5 ptos.)**

iii) Si $h(x) = x^3 - x^2 + x$ demuestre que $\exists\ x_0 \in I\!R$ tal que $h(x_0) = 10$. Justifique **(1.5 ptos.)**

TIEMPO: 3 horas.