**Control 3   MA12A   CALCULO**
**Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile**
**Semestre 2006-1 (8 de Julio)**

**P1.** Calcule, si existen, los siguientes límites, fundamentando sus cálculos o resultados en cada caso

$i)\ \lim\limits_{x\to 1} \{(x-1)[log_x(a) + log_{x^2}(b)]\}\ \ a,b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ; $ii)\ \lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

$iii)\ \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}$ ; $iv)\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{cos x-1}{tg(x^2)}$

$v)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-n)^n}{(n-1)^n}$ ; $vi)\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4n-7}{4n+1}\right)^n$

(1.0 pto. c/uno)

**P2.** Sea $f : \mathbb{R} - \{1,4\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} + \frac{x^3+1}{x-4}$

a) (1.5 ptos.) Estudie la continuidad de $f$ en su dominio. Justifique.

b) (1.5 ptos.) Es posible definir $f$ en 1 y 4 de tal forma que resulte una función continua? Justifique.

c) (1.5 ptos.) Pruebe que $\exists x_0 \in [2,3]$ tal que $f(x_0) = 0$.

d) (1.5 ptos.) Demuestre que $[-23, \frac{1}{2}] \subseteq f([2,3])$.

**P3.** Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$.

a) (1.0 pto.) Pruebe que $f$ es continua y estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^+$.

b) (1.0 pto.) Demuestre que $h = f \circ f$ es continua y creciente en $\mathbb{R}^+$

c) (2.0 ptos.) Sea la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_0 = 1$ y $a_{n+1} = f(a_n)$.

Verifique que $a_0 < a_2 < a_3 < a_1$.

Deduzca que la subsucesión $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y que $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y que ambas subsucesiones son acotadas.

d) (1.0 pto.) Concluya que ambas subsucesiones convergen y pruebe que:

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \sqrt{2}$$

e) (1.0 pto.) Pruebe, por definición, que $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = \sqrt{2}$.

TIEMPO : 3 horas.