Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 13 de Septiembre del 2001. Tiempo: 3,0 hrs.

CONTROL 4

MA12A CALCULO 2001

Problema 1.

Estudiar completamente la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^3 + 2x^2 + x)}$ con $x \in \mathbb{R}$, indicando:

(a) (3.0 pts.) ceros, continuidad, eventuales reparaciones de discontinuidad, diferenciabilidad, crecimiento, puntos críticos, máximos y mínimos,

(b) (3.0 pts.) concavidad, puntos de inflexión, asíntotas, recorrido y gráfico.

Problema 2.

(a) (2.0 pts.) A partir del desarrollo de Taylor en torno a 0 de $(x+a)^n$, con $n \geq 1$ un entero, demuestre la fórmula del binomio $(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} x^k$.

(b) (2.0 pts.) Sea $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua en $[0, +\infty)$ y derivable en $(0, +\infty)$ tal que $f(0) = 0$ y f' es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$. Pruebe que $\forall x > 0,\ f'(x) > \frac{f(x)}{x}$ y que $\frac{f(x)}{x}$ es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$.

(c) (2.0 pts.) Dados $a > 0$ y $b > 0$, estudie el crecimiento de la función $f(x) = (a^x + b^x)^{1/x}$ en el intervalo $(0, +\infty)$.

Problema 3.

Se quiere calcular el costo mínimo de un estanque para agua potable de $45\pi\ m^3$ de capacidad que se construirá en forma de un cilindro circular de base plana y coronado por una semiesfera, sabiendo que los costos unitarios de obra construida son: base p $\$/m^2$, manto $3p$ $\$/m^2$, cúpula $4p$ $\$/m^2$ $(p > 0)$. Siga las siguientes indicaciones:

(a) (2.0 pts.) Si h es la altura del cilindro y r su radio, deduzca que

$$h(r) = \frac{45}{r^2} - \frac{2}{3}r,$$

y muestre que el costo del estanque en función de r está dado por

$$c(r) = \pi p[9r^2 + 6rh(r)].$$

(b) (4.0 pts.) Bosqueje la función de costo $c(r)$ en su dominio. Determine las dimensiones del cilindro (radio y altura) de manera que el costo del estanque sea mínimo y explicite el valor del costo mínimo. Justifique su respuesta.

<u>Indicación</u>: Volumen esfera de radio r: $V = 4/3\pi r^3$. Area esfera: $A = 4\pi r^2$. Volumen cilindro circular de altura h y base de radio r: $V = \pi r^2 h$. Area lateral cilindro: $A = 2\pi rh$.