Departamento de Ingeniería Matemática
Fac. Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

Control 4, MA12A, Primavera 1996

Problema 1.

1. Sea $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$.
   (a) **2.0 pts.** Determine los valores de x para los cuales $f(x)$ existe y calcule su valor.
   (b) **2.0 pts.** Estudie la continuidad y la diferenciabilidad de f, en los puntos donde $f(x)$ existe.
2. Considere la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}\frac{arctg(x)}{x}$ definida sobre $[-1,1]\setminus\{0\}$.
   (a) **1.0 pto.** Defina f en 0 de modo que resulte continua en dicho punto (no utilice la regla de l'Hôpital).
   (b) **1.0 pto.** Pruebe que la función resultante, definida en $[-1,1]$, es uniformemente continua.

Problema 2.

1. **2.0 pts.** Encuentre la recta tangente a la curva de ecuación
$$e^{2arcsen(y\cdot x)} = \ln(1+x^2+y^2),$$
en el punto P donde la curva intersecta al eje de las abscisas ($y=0$), con abscisa positiva ($x>0$).
2. Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos veces derivable con $g'(x)\neq 0$ en todo $\mathbb{R}$ y $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = cos(kg(x))$$
   (a) **2.0 pts.** Muestre que f, f', f'', g, g' y g'' satisfacen la ecuación
$$f'' - f'\frac{g''}{g'} + (kg')^2 f = 0$$
   (b) **2.0 pts.** Calcule $f^{(n)}(0)$ para $g(x)=x$.

Problema 3. Sean $b>0$, $a\in]-b,b[$ y $f:[-b,b]\to\mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = (b^2-x^2)(a-x)$$

1. **1.0 pto.** Muestre que $\forall x\in[-b,b]$ y $\forall h\in[-b-x,b-x]$
$$f(x) - f(x+h) = -h(3x^2-2xa-b^2+h^2+3xh-ah) \tag{1}$$
2. **3.0 pts.** Muestre que f admite sólo un mínimo global y sólo un máximo global en $[-b,b]$ (no utilice segundas derivadas).

   Ind: Puede proceder como sigue. Determine los candidatos a extremos y utilice la ecuación 1 para probar que efectivamente son extremos.
3. **2.0 pts.** Muestre que la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de f en $[-b,b]$ es $\frac{4}{27}(\sqrt{a^2+3b^2})^3$ y calcule el valor de a que hace mínima esta diferencia.