Departamento de Ingeniería Matemática

Universidad de Chile

CONTROL 4 CALCULO, MA – 12A, 1997

Problema 1 Considere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x ln(x)}{x-1} & x > 0 \text{ y } x \neq 1 \\ \alpha & x = 1 \end{cases}$$

1. (1.5 pts.) Determine el valor de α para que f sea continua en $\mathbb{R}_+^*$.

2. (1.5 pts.) Analice la existencia de $f'(x)$ para $x > 0$. En caso de existir, calculela $f'(x)$.

3. (1.0 pto.) Determine los puntos de continuidad de f' en $]0, \infty[$.

4. (1.0 pto.) Asuma que $f^{(n)}$ existe para $n \geq 2$ y que es continua en 1. Calcule una recurrencia para $f^{(n)}(1)$, utilizando la fórmula de Leibnitz para $(x-1)f(x)$.

5. (1.0 pto.) Encuentre el polinomio de Taylor de orden 3 para f en torno a 1.

Problema 2

1. (4.0 pts.) Analice completamente $f(x) = e^{\frac{1}{ln(x)}}$ ([dominio, paridad, periodicidad] (1.0 pto.), [recorrido asíntotas de todo tipo] (1.0 pto), [derivada, crecimiento, mínimos y máximos] (1.0 pto), [derivada segunda, concavidad, puntos de inflexión, gráfica] (1.0 pto.))

2. (2.0 pts.) Calcule el límite $\lim_{x \to 0} x^2 ln(\frac{sen(x)}{x})$.

Problema 3

1. (3.0 pts.) Sean $0 < a < b$. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a, b]$, derivable en $]a, b[$, con $f(a) = f(b) = 0$ y $f'(a) = 0$. Demuestre que existe $c \in]a, b[$ de modo que la tangente a f en el punto c pasa por el origen. Analice que pasa si $a = 0$.

2. (3.0 pts.) Determine el mayor volumen de un cilindro de radio r y altura h, donde $P = (h, r)$ recorre la recta $L : ay + bx = ab$, $a, b > 0$ y $a + b = 1$. Analizar para que valor(es) de a este mayor volumen se maximiza.