Universidad de Chile
Fac. Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

CONTROL 4, MA 12 A, 1998

Problema 1. Considerar la función $f(x) = (1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}) \cdot e^{\frac{1}{x}}$, definida en $I\!R \setminus \{0\}$.

(a) (**1.0 pto.**) Determinar si f posee ceros e indicar los intervalos donde el signo de f es constante.

(b) (**1.0 pto.**) Analizar los límites de f cuando $x \to 0^+$, $x \to 0^-$, $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.

(c) (**1.5 pts.**) Calcular f'. Deducir propiedades de crecimiento para f y determinar si f posee máximos y/o mínimos. En caso de existir, calcularlos.

(d) (**1.5 pts.**) Calcular f''. Deducir propiedades acerca de la convexidad de f y determinar si f posee puntos de inflexión. En caso de existir, calcularlos.

(e) (**1.0 pto.**) Dibujar un gráfico de la función.

Problema 2. Sea $f : I\!R \to I\!R$ una función 2 veces derivable y con segunda derivada continua. Dado un punto $x_0 \in I\!R$, fijo, y un real $h > 0$ se pide:

(a) (**2.0 pts.**) Demostrar que los coeficientes a_h, b_h y c_h de la parábola

$$y = c_h + b_h(x - x_0) + a_h(x - x_0)^2,$$

que coincide con el grafo de f en los puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ y $(x_0 + 2h, f(x_0 + 2h))$, son

$$a_h = \frac{f(x_0) + f(x_0+2h) - 2f(x_0+h)}{2h^2}, \quad b_h = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)}{2h}, \quad c_h = f(x_0).$$

(b) (**2.0 pts.**) Definamos $a = \lim\limits_{h\to 0} a_h$, $b = \lim\limits_{h\to 0} b_h$ y $c = \lim\limits_{h\to 0} c_h$. Demostrar, usando la regla de L'hôpital, que $a = \frac{1}{2}f''(x_0)$, $b = f'(x_0)$ y $c = f(x_0)$.

(c) (**2.0 pts.**) Calcular los coeficientes a, b y c definidos en la parte (b) para la función definida en $I\!R$ por $f(x) = x^5 \ln(1 + x^2)$ y el punto $x_0 = 1$.

Problema 3.

(a) (**2.0 pts.**) Sea $f : I\!R \to I\!R$ dos veces derivable en $I\!R$. Demostrar que si para todo $x \in I\!R$ se cumple que $f(x) > 0$ y $f(x)f''(x) \geq f^2(x)$, entonces la función definida en $I\!R$ por $g(x) = \ln(f(x))$ es convexa.

(b) (**2.0 pts.**) Estudiar el crecimiento de la función definida en $(0, \infty)$ por $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, para determinar el valor máximo alcanzado por la sucesión $\sqrt[n]{n}$.

(c) (**2.0 pts.**) Sea $f : I\!R \to I\!R$ una función dos veces derivable en $I\!R$. Dado un punto $a \in I\!R$, fijo, y un real $h > 0$, se define la función $g : I\!R \to I\!R$ por $g(t) = f(t) + f'(t) \cdot (a + h - t)$. Aplicar el teorema del valor medio a la función g para probar que existe $c \in (a, a + h)$ tal que

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + hf''(c)(a + h - c).$$