Control #4 MA12A CALCULO

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Semestre 2003-2

P1.- **(i)** (2 ptos.) Sean $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones crecientes y derivables de signo constante: $g < 0$ y $h > 0$. Dadas las constantes $a, b, c > 0$, estudie la monotonía de

$$f(x) = g(b - ax^3) \cdot h(\arctan(cx)).$$

Nota: los paréntesis denotan composición.

(ii) **(a)** (2 ptos.) Usando el Teorema del Valor Medio o **TVM**, demuestre que

$$1 + \ln x < (x+1)\ln(x+1) - x\ln x < 1 + \ln(x+1), \quad \forall x > 0.$$

(b) (2 ptos.) Deduzca de **(a)** la desigualdad

$$n \ln n - (n-1) \leq \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n < (n+1)\ln(n+1) - n, \quad \forall n \geq 1.$$

P2.- Considere la función $f : (-1, 1) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)}$.

(i) (1.2 pto.) Calcule $\lim f(x)$ cuando $x \to -1^+$ y $x \to 1^-$.

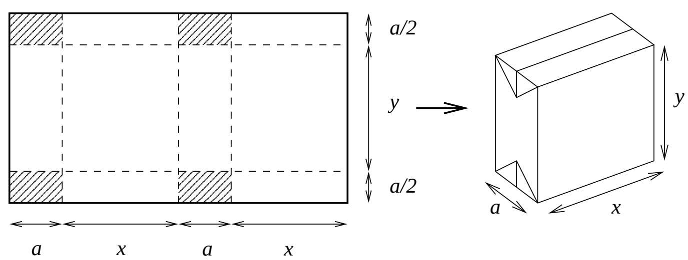
(ii) (1.2 pto.) Pruebe que el valor $f(0) = -1$ repara la continuidad de f en $x = 0$.

(iii) (1.2 pto.) Calcule f' para $x \neq 0$.

(iv) (1.2 pto.) Calcule por definición $f'(0)$.

(v) (1.2 pto.) Pruebe que f es decreciente. **Indicación:** use que $\ln z \geq 1 - \dfrac{1}{z}$ para $z > 0$.

P3.- Un envase TetraPak se fabrica plegando un rectángulo de cartón como indica la figura (las regiones achuradas corresponden a los pliegues de las esquinas).



Se desean determinar las dimensiones óptimas a, x, y que minimicen la superficie del rectángulo original para un volumen total de 1000 (un litro).

(i) (1ptos.) Encuentre una expresión de la superficie sólo en términos de las cantidades a, x.

(ii) (2.5ptos.) Tomando a como parámetro conocido, demuestre que el valor $x = x(a)$ que minimiza dicha superficie es $x = \sqrt{\dfrac{1000}{a}}$. Justifique que se trata de un mínimo.

(iii) (2.5ptos.) Use **(ii)** para obtener una expresión $S(a)$ para la superficie en función solamente de a y luego determine el valor mínimo de esta función (justifique por qué es mínimo). Explicite los valores óptimos de a, x, y.