Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 18 de Octubre del 2001. Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL 5

MA12A CALCULO 2001

Problema 1.

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[0,1]$ y diferenciable en $(0,1)$ tal que $f(0) = 0$ y $\forall x \in (0,1)$, $0 \leq f'(x) \leq 1$. Se pide probar que $\left[\int_0^1 f(t)dt\right]^2 \geq \int_0^1 f(t)^3 dt$, para lo cual proceda como sigue:

(a) (1.0 pto.) Pruebe que $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \geq 0$.

(b) (2.5 pts.) Se define $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ mediante $G(x) = 2\int_0^x f(t)dt - f(x)^2$. Muestre que $G(x)$ es creciente y deduzca que $\forall x \in [0,1]$, $G(x) \geq 0$.

(c) (2.5 pts.) Defina $F(x) = \left[\int_0^x f(t)dt\right]^2 - \int_0^x f(t)^3 dt$. Pruebe que $F'(x) = f(x)G(x)$, establezca el crecimiento de $F(x)$ y deduzca que $\forall x \in [0,1]$, $F(x) \geq 0$. Concluya.

Problema 2.

(a) (2.0 pts.) Encuentre una fórmula de recurrencia para $I_n = \int (x+1)^n \sqrt{x}dx$.

(b) (4.0 pts.) Considere la función $f : [1,5] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$.

(b.1) Calcule las sumas inferior $s(f,P)$ y superior $S(f,P)$ si $P = \{x_0, ..., x_n\}$ es una partición que sigue una progresión geométrica, es decir $x_i = q^i$ donde $q = \sqrt[n]{5}$. Nota: Su resultado debe quedar sólo en términos de n.

(b.2) Use el resultado anterior y el Teorema Fundamental del Cálculo para probar que $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{5} - 1) = ln(5)$.

Problema 3.

(a) (3.0 pts.) Calcule el área de la región del primer cuadrante limitada por las curvas de ecuaciones $y^2 = \frac{x}{1-x}$, $y^2 = 2(1-x)$ y el eje OX.

(b) (3.0 pts.) Sea R la región del plano OXY limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = mx$ $(m > 0)$. Se pide encontrar el valor de m tal que los volúmenes generados por la rotación de R en torno a OX y a OY sean iguales.