U. DE CHILE

INGENIERIA

Control #5 MA12A Cálculo

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2002

P1.-

(i) Sea $f(x) := \int_1^x x\,\ln(tx)\,dt$, definida en $(0,+\infty)$.

(a) (2 ptos.) Encuentre $\int \ln(t)$ y calcule $f(2)$.

(b) (2 ptos.) Demuestre que $f'(x) = (4x-1)\ln(x) \quad \forall x \in (0,+\infty)$.

(ii) (2 ptos.) Asumiendo que la función $g(t) = \operatorname{arc\,sen}(\arctan(t))$ es continua en $[0,\tan(1)]$, encuentre la derivada de la función $f(x) = \int_0^{\tan(x)} \operatorname{arc\,sen}(\arctan(t))\,dt$ para $x \in [0,1]$.

P2.-

(i) Sea $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$. Si

$$R = \left\{(x,y) \in I\!R^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le f(x)\right\}.$$

(a) (2 ptos.) Encuentre el área de la región R.

(b) (2 ptos.) Encuentre el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar la región R en torno al eje OX.

(ii) (2 ptos.) Dada la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1,$$

encuentre el área del manto generado al rotar esta elipse en torno al eje OX entre $x = -1$ y $x = 1$.

P3.- **(i)** (3 ptos.) Calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$.

(ii) Sea f una función infinitamente derivable en $I\!R$. Sea $I_n = \int e^{-x} f^{(n)}(x)\,dx$, donde $f^{(n)}$ denota la $n-$ésima derivada de f.

(a) (1.5 ptos.) Demuestre que $\forall x \in I\!R$,

$$I_n = I_{n+1} - e^{-x} f^{(n)}(x).$$

(b) (1.5 ptos.) Si $f^{(k)} = 0$ para un cierto $k \in I\!N$, $k \ge 1$, demostrar que $\forall x \in I\!R$

$$I_0 = \int e^{-x} f(x)\,dx = -e^{-x} \sum_{i=0}^{k-1} f^{(i)}(x) \ + \ C,$$

siendo C una constante real.

Tiempo: 3 horas