U. DE CHILE

INGENIERIA

Control #5 MA12A CALCULO
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.
Semestre 2003-2

Problema 1.

a) **(2.0 pts.)** Calcule

1) $$\int \frac{e^{3x}}{e^x - 1} dx$$

2) $$\int \operatorname{sen} 3x \, \cos 2x \, dx$$

b) **(2.0 pts.)** Calcule $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \operatorname{senh}\left(\frac{k}{n}\right)$

c) **(2.0 pts.)** Encuentre el desarrollo de Taylor en torno a $x_0 = 0$ de orden 2 de la función

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Encuentre además una cota numérica aproximada del resto para $x = \frac{1}{2}$.

Problema 2.

a)

i) **(1.5 pts.)** Calcule el área A de la región encerrada por las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ entre las abscisas 0 y $\frac{\pi}{4}$.

ii) **(1.5 pts.)** Calcule el volumen V del sólido de revolución generado por la rotación de la región precedente en torno al eje OX.

b) **(3.0 pts.)** Para $n \in \mathbb{N}$ se define

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{4 - x^2}} dx.$$

Calcule I_0 e I_1. Encuentre una recurrencia que permita calcular I_{n+2} en función de I_n.

Problema 3.

a) Sean $f, g\colon [0,1] \to [0,1]$ dos funciones continuas. Además se sabe que g es derivable en $(0,1)$ y satisface las relaciones

$$g(1) < 1, \quad \text{y} \quad 0 \le g'(x) \le 1, \quad \forall x \in (0,1).$$

Considere ahora la función F definida en $[0,1]$ por

$$F(x) = 2x - 1 - \int_0^{g(x)} f(t)dt.$$

Para demostrar que F posee un único cero se pide lo siguiente:

i) **(1.5 pts.)** Pruebe que F es continua y que $F(0) < 0 < F(1)$. Concluya que F posee al menos un cero en $[0,1]$.
Indicación: Use el hecho que $f(x) \leq 1$ y $0 \leq g(1) < 1$ para demostrar que $\int_0^{g(1)} f(t)dt < 1$.

ii) **(1.5 pts.)** Pruebe que F es derivable en $(0,1)$ y que es estrictamente creciente. Deduzca que el cero de F es único.

b) Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y acotada inferiormente por una constante $c > 0$. Para demostrar que $\dfrac{1}{f}$ es integrable se pide los siguiente:

i) **(1.5 pts.)** Si $S()$ y $s()$ denotan las sumas superiores e inferiores, pruebe que para toda partición P del intervalo $[a,b]$ se cumple

$$S(\frac{1}{f}, P) - s(\frac{1}{f}, P) \leq \frac{1}{c^2}\left\{S(f,P) - s(f,P)\right\}.$$

ii) **(1.5 pts.)** Use el resultado anterior para demostrar que la función $\frac{1}{f}$ es integrable en $[a,b]$.

Tiempo: **3h00**