Universidad de Chile
Fac. Cs. Físicas y Matemáticas
Depto. Ing. Matemática

Control 5, MA12A, Primavera 1996

Pregunta 1 Considere la función $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x} e^{\frac{1}{x}}$. Para f

1. **2.0 ptos.** Encuentre dominio, ceros y asíntotas de todo tipo. Analice su continuidad, estudie los límites laterales en 0 y encuentre su recorrido.
2. **2.0 ptos.** Calcule f'. Estudie el crecimiento de f y encuentre los máximos y mínimos, tanto locales como globales (en el caso de existir).
3. **1.0 pto.** Calcule f''. Estudie la convexidad de f y encuentre los puntos de inflexión.
4. **1.0 pto.** Usando toda la información anterior grafique f.

Problema 2

1. **2.0 ptos.** Defina la función $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{sen(x)}$ en cero para que sea continua en el intervalo $]-\pi, \pi[$.
2. **2.0 ptos.** Utilice un desarrollo de Taylor de orden dos para aproximar $\sqrt{3}$, con al menos dos decimales exactos ($\sqrt{3} = 1.7320...$).
3. **2.0 ptos.** Sea f continua en $[0, +\infty[$, derivable en $A =]0, +\infty[$ y tal que $f(0) = 0$ y $f'(x)$ es creciente en A. Utilice el Teorema del Valor Medio para probar que $\forall x \in A$, $f'(x) \geq \frac{f(x)}{x}$. Concluya que la función $\frac{f(x)}{x}$ es creciente en A.

Problema 3 Considere la sucesión $a_n = \int\limits_0^n q^x dx$, con $0 < q < 1$.

1. **2.0 ptos.** Explique porqué (a_n) está bien definida, es decir, porqué q^x es Riemann integrable en $[0, n]$, y muestre que es estrictamente creciente.
2. **2.0 ptos.** Calcule las sumas de Riemann inferior y superior para q^x y la partición $P = \{0, 1, ..., n\}$.
3. **1.0 pto.** Utilice las sumas anteriores para obtener las siguientes cotas para (a_n).
$$\forall n \in I\!N, \quad q\frac{1-q^n}{1-q} < \int\limits_0^n q^x dx < \frac{1}{1-q}.$$
4. **1.0 pto.** Concluya que (a_n) converge y que $a = \lim a_n$ satisface
$$\frac{q}{1-q} \leq a \leq \frac{1}{1-q}.$$