Universidad de Chile
Fac. Cs. Físicas y Matemáticas
Depto. Ingeniería Matemática

Control 5 MA12A

15 de Octubre 1998

Problema 1.

1. (**2.0 pts.**) Sea $f : [0,2] \to R$ definida por $f(x) = 1 - x$. Indique por qué f es integrable en $[0,2]$. Calcule la suma superior e inferior asociada a f y una partición equiespaciada de $[0,2]$ de n términos. Deducir el valor de la integral $\int_0^2 f(x)dx$ (No utilice el Teorema Fundamental del Cálculo).
2. (**2.0 pts.**) Sea f una función creciente definida en $[0,1]$. Probar que
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) - \int_0^1 f(x)dx \leq \frac{f(1)-f(0)}{n}$.
3. (**2.0 pts.**) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n\sqrt{n^2+i^2}}$.

Problema 2.

1. (**2.0 pts.**) Sea G: $[0,\infty[\to R$ definida por $G(x) = \int_0^x \frac{\text{sen }(t)}{t}dt$, donde $\frac{\text{sen }(t)}{t}$ se define en cero por continuidad. Demostrar que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen }(t)}{t}dt - 1.$$

2. Considere la función F: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to R$ definida por $F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1+2t\cdot\cos(x)+t^2}$.
   (a) (**2.0 pts.**) Demostrar que F está bien definida y que para $x \neq 0$ se cumple que $F(x) = \frac{x}{2\text{sen}(x)}$.
   Ind: $\cot(\frac{x}{2}) = \frac{1+\cos(x)}{\text{sen }(x)}$ y $\cot\ (x) = \text{tg}\ (\frac{\pi}{2} - x)$.
   (b) (**2.0 pts.**) Utilizar este resultado para probar que F es continua en todo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Problema 3.

1. (**2.0 pts.**) Pruebe que $I_n = \int \frac{e^{ax}}{x^n}$ para $n \geq 2$, satisface la recurrencia $I_n = -\frac{e^{ax}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}I_{n-1}$.
2. Considere $I = \int_0^{\pi} \frac{t\,\text{sen}\,(t)}{1+\cos^2(t)}dt$.
   (a) (**1.0 pto.**) Demostrar que $I = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}\,(t)}{1+\cos^2(t)}dt$.
   Ind: separar el intervalo $[0,\pi]$ en los intervalos $[0,\frac{\pi}{2}]$ y $[\frac{\pi}{2},\pi]$ y realizar el cambio de variables $t = \pi - u$.
   (b) (**1.0 pto.**) Usando lo anterior, calcule el valor de I.
3. (**2.0 pts.**) Calcule $I = \int x^3\sqrt{1-x^2}dx$.

Sin Consultas
Tiempo 3:00 hrs.