CONTROL 5

MA12A CALCULO 1999

Problema 1.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que

$$\forall x \in (a,b) \quad |f'(x)| \leq K.$$

1. (2.0 pts.) Usar el TVM para derivadas para demostrar que
$$\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]} \quad S(f,P) - s(f,P) \leq K\,|P|\,(b-a)\,, \tag{1}$$
donde $\mathcal{P}_{[a,b]}$ es el conjunto de particiones del intervalo $[a,b]$ y $|P|$ es la norma de la partición P definida por $|P| = \max\{(x_i - x_{i-1}) : i = 1,...,n\}$.
2. (2.0 pts.) Deducir que toda función f que satisfaga la propiedad 1 es integrable en $[a,b]$.
3. (2.0 pts.) Demostrar que toda función f que satisfaga la propiedad 1 también satisface lo siguiente
$$\left| \int_a^b f - \frac{1}{2}\left(S(f,P) + s(f,P)\right) \right| \leq \frac{1}{2} K\,|P|\,(b-a)\,.$$

Problema 2.

1. (2.0 pts.) Calcular el valor del límite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}\ (t^2)\,dt}{1 - e^{x^6}}$$
2. (2.0 pts.) Calcular
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$
Ind: recordar que $\cos(2u) = \cos^2(u) - \operatorname{sen}^2(u)\,.$
3. (2.0 pts.) Para $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx$ demostrar que
$$(1+2n)\,I_n = 2x^n\sqrt{1+x} - 2nI_{n-1}.$$

Problema 3.

(6.0 pts.) Calcular la siguiente integral

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 + \operatorname{sen}(x)} dx.$$

Duración 3 hrs.