Control 5 MA12A CALCULO
Escuela de Ingeniería, F.C.F.M., U. de Chile
Año 2004

P1. (i) (2.0 ptos.) Calcule $\int \frac{dx}{e^{3x}\sqrt{1-e^{-2x}}}$.

(ii) (2.0 ptos.) Calcule $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\operatorname{sen} x+\cos x+1}$

(iii) (2.0 ptos.) Demuestre que $I_n = \int (x+a)^n \sqrt{x+b}\, dx \quad a,b,x>0$ satisface la recurrencia $I_n = \frac{2}{3+2n}(x+a)^n(x+b)^{3/2} - \frac{2n(b-a)}{3+2n} I_{n-1} \;\; \forall n \geq 1$.

P2. (a) Sea $f : [1,\infty) \to I\!R$ una función no negativa y creciente

(i) (1.5 ptos.) Usando la partición $P = \{1,2,3,\ldots,n\}$ pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{i=2}^{n} f(i) \quad \forall n \geq 2$$

(ii) (2.5 ptos.) Considere $f(x) = Ln\, x$ y utilice la parte (i) para demostrar que

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n+1} \leq n! \quad \forall n \geq 1$$

(b) Sea $s_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} [i\sqrt{n^2-i^2}]$.

(i) (1.0 pto.) Identifique s_n como una suma de Riemann, determinando la función y la partición involucradas.

(ii) (1.0 pto.) Calcule $\lim_{n\to\infty} (s_n)$

P3. (a) (i) (1.0 pto.) Sea f una función impar, integrable en $[-a,a]$. Pruebe que

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

(ii) (2.0 ptos.) Considere la función g definida por $g(x) = \frac{1+x^3}{\cos^2 x}$ en $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Justifique la integrabilidad de g en $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ y calcule $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} g(x)dx$

(Ind: Integre por partes y use (i), donde corresponda).

(b) (i) (1.0 pto.) Calcule $\lim_{x\to\pi} \frac{e(x^2-\pi^2)+\pi \int_{x^2}^{\pi^2} \frac{e^{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt}{1+\cos x}$

(ii) (1.0 pto.) Se define $F(x) = \int_0^x (u-x)f'(u)du$, con f' integrable en $[0,x]$. Pruebe que $F'(x) = f(0) - f(x)$.

(iii) (1.0 pto.) Demuestre que $\left| \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x} \operatorname{sen} x}{1+x^2} dx \right| \leq \frac{\pi}{12e}$

Tiempo: 3 hrs.