Control 5 MA12A Cálculo
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2005-2 (6 de octubre)

P1. a) Calcule las siguientes primitivas

i) (2.0 ptos)

$$\int \frac{4x^3 - 3x^2 + 3}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$$

ii) (2.0 ptos)

$$\int e^{-x}\ell n(1+e^x)dx$$

b) (2.0 ptos) Determine el valor de $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$.

P2. i) (3.0 ptos) Encuentre una fórmula de recurrencia para la integral $I_n = \int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)^n cos(ax)dx$, $a \neq 0$, sabiendo que es de la forma $I_n = p_n \cdot I_{n-1} + q_n \cdot I_{n-2}$, $n \geq 2$, donde p_n y q_n son coeficientes dependientes de $n \in I\!N$.

ii) (1.5 ptos) Considere la función $f(x) = 2x - x^2$ y la región R definida por $R = \{(x,y) \in I\!R^2 / x \geq 0; 0 \leq y \leq f(x)\}$. Se pide determinar sobre el gráfico de $f(x)$ el punto $P(x_0, f(x_0))$ de modo que la recta que une el origen con P divida el área de la región R en dos partes iguales.

iii) (1.5 ptos) Calcule el límite

$$\lim_{x \to 1} \frac{\int\limits_1^x (x-1)sen(t^2)dt}{\int\limits_{x^2}^{x^3} sen(t^2-1)dt}$$

P3. i) (2.0 ptos) Sea $f : [a,b] \to I\!R$ en que $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$ y f es integrable sobre $[a,b]$. Demuestre que $f^2(x)$ es integrable sobre $[a,b]$.

ii) (2.0 ptos) Dada la función $f(x) = \frac{\ell n x}{x}$ se pide calcular el área del primer cuadrante encerrada por la curva y el eje $0x$, entre las abscisas de su cero y su máximo.

iii) (2.0 ptos) Sea $f : I\!R \to I\!R$, derivable con derivada continua en $I\!R$. Si $a, b \in I\!R$ con $a < b$, son tales que $f(a) = f(b) = 0$ y $\int\limits_a^b f^2(x)dx = 1$, demuestre que

$$\int\limits_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2}$$

Tiempo: 3 horas