Control 5, MA12A CALCULO
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2006-1 (21 de Octubre)

P1. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} q^{\left[\frac{\ln x}{\ln q}\right]} & \text{si } x \in (0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

donde $0 < q < 1$ es una constante fija.

Obs: El paréntesis cuadrado denota a la función parte entera.

Para calcular la integral $\int_0^1 f(x)dx$ realice lo siguiente:

a) Demuestre que cuando $x \in (q,1)$ entonces $f(x) = 1$. A continuación, pruebe que si $x \in (q^n, q^{n-1})$, donde $n \in \mathbb{N}^*$, entonces $f(x) = q^{n-1}$. Usando la información anterior, bosqueje el gráfico de f.

b) Dado $n \in \mathbb{N}^*$ acote la integral $A_n = \int_0^{q^n} f(x)dx$ y calcule $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

c) Dado $n \in \mathbb{N}^*$, calcule $\int_{q^n}^1 f(x)$

d) Use los resultados anteriores apropiadamente para calcular $\int_0^1 f(x)dx$.

P2.

a) Calcular la integral

$$J = \int_{-2a}^{2a} x\sqrt{4a^2 - x^2}dx - \int_0^{2a} x\sqrt{a^2 - (x-a)^2}dx$$

b) Calcular la integral

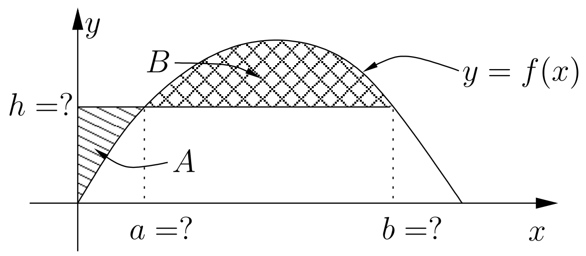
$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{4 - \cos^2 x}dx$$

c) Dada la integral $I_{m,n} = \int_0^1 x^n(1+x)^m dx$ pruebe que

$$(m+1)I_{m,n} + nI_{m+1,n-1} = 2^n$$

P3.

a) Dada $f(x) = 2x - 3x^3$, determinar la altura de una recta horizontal h para que las áreas A y B de la figura sean iguales.



b) Calcule la superficie del manto del paraboloide engendrado por la rotación de la parábola $y = \sqrt{x}$ en torno al eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$.

c) Determinar qué función f continua, tal que $f(x) > 0$ para $x > 0$, satisface la propiedad siguiente: $\forall x \in [0,\infty)$ se define $R_x = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le t \le x,\ 0 \le y \le f(t)\}$ y al hacer rotar esta región en torno a los ejes OX y OY los volúmenes de los sólidos de revolución V_{OX} y V_{OY} así obtenidos son iguales.

Obs: Algunas fórmulas útiles son

$$L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx, \qquad V = \pi\int_a^b y^2dx, \qquad V = 2\pi\int_a^b xydx, \qquad S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx$$