Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 16 de Noviembre del 2000.

CONTROL 6

MA12A CALCULO 2000

Problema 1. Sea f la función definida en $(-1,+\infty)$ por $f(x)=\frac{x}{(1+x)^3}$. Para los volúmenes y áreas siguientes, se pide determinar si son finitos y en tal caso calcularlos.

a) (1.5 pts.) Área de la región $R=\{(x,y):0\le x, 0\le y\le f(x)\}$.

b) (1.5 pts.) Área de la región $Q=\{(x,y):-1<x\le 0, f(x)\le y\le 0\}$.

c) (1.5 pts.) Volumen del sólido obtenido al rotar la región R de la parte a), en torno al eje OX.

d) (1.5 pts.) Volumen del sólido obtenido al rotar la región R de la parte a), en torno al eje OY.

Problema 2. Sea (f_n) la sucesión de funciones definida en el intervalo $[0,2]$ por $f_n(x)=(1+x^n)^{\frac{1}{n}}$ y $f(x)=\max\{1,x\}$.

a) (1.0 pto.) Demostrar que $\forall x\in[0,2]$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\ge 1$ se tiene que $1\le \dfrac{f_n(x)}{f(x)}\le 2^{\frac{1}{n}}$

b) (1.0 pto.) Demostrar que la sucesión (f_n) converge puntualmente a f en el intervalo $[0,2]$.

c) (2.0 pts.) Demostrar que la sucesión (f_n) converge uniformemente a f en el intervalo $[0,2]$.

d) (2.0 pts.) Demostrar que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^2(1+x^n)^{\frac{1}{n}}\,dx=\frac{5}{2}$

Problema 3.

a) (2.0 pts.) Analizar la convergencia de las series $\displaystyle\sum_{k\ge 2}\frac{(-1)^k}{k\ln(k)}$ y $\displaystyle\sum_{k\ge 2}\frac{1}{k\ln(k)}$.

b) (1.0 pto.) Calcular el radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{k\ge 2}\frac{x^k}{k\ln(k)}$.

c) c.i) (1.0 pto.) Calcular el radio de convergencia R de la serie $f(x)=\displaystyle\sum_{k\ge 1}\frac{x^k}{k(k+1)}$.

c.ii) (1.0 pto.) Demostrar que para todo $x\in(-R,R)$ se tiene que $(xf(x))''=\dfrac{1}{1-x}$

c.iii) (1.0 pto.) Demostrar que para todo $x\in(-R,R)\backslash\{0\}$ se tiene $f(x)=\dfrac{1+(1-x)(\ln(1-x)-1)}{x}$