U. DE CHILE

INGENIERIA

Control #6 MA12A Cálculo

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2002

P1.-

(i) (2 ptos.) Pruebe que las integrales $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^2}$, $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ divergen.

(ii) (2 ptos.) Pruebe que $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{1}{x(\ln x)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx$ converge y encuentre su valor.

(iii) (2 ptos.) Encuentre los valores de $\alpha > 0$ para lo cuales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha(1-x)}}\, dx$ converge.

Ind. El comportamiento de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$ y $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}$ se considera conocido.

P2.-

(i) **(a)** (1.5 ptos.) Demuestre que para todo número real p, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{e^{pn}}{n!}$ converge .

(b) (1.5 ptos.) Estudie la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\left(1+\frac{10}{n}\right)^{n^2}}{n!}$.

(ii) Considere la función

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x), \quad x \geq 0.$$

(a) (1.5 ptos.) Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_n$ de término $a_n = (-1)^n f(n)$ converge.

(b) (1.5 ptos.) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\, f(x)$ y utilice este resultado para demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_n$ definida en **(ii)(a)** no converge absolutamente.

P3.- **(i)** (2 ptos.) Demuestre que $\forall a > 1$ la integral $\displaystyle\int_1^\infty a^{-x}\, dx$ converge .

(ii) (2 ptos.) Sea $f : [1,\infty) \to (0,\infty)$ una función continua tal que

$$\exists \lim_{x\to+\infty} (f(x))^{1/x} < 1.$$

Demuestre que $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\, dx$ converge. Concluya que $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{e}{x}\right)^x dx$ es convergente.

Ind. Observe que si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) < 1$, entonces $\exists a > 1$ tal que $g(x) \leq \frac{1}{a}$ para x suficientemente grande.

(iii) (2 ptos.) **Usando** el criterio integral, analice la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^\infty \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$. Verifique también que se cumplen todas las hipótesis necesarias para aplicar este criterio.

Tiempo: 3 horas