Departamento de Ingeniería Matemática
Fac. Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

Control 6, MA12A, Primavera 1996

Problema 1.

1. Calcule el valor de las siguientes integrales

   (a) **(2.0 pts.)** $I = \int_{-3}^{3} |2+x|dx$

   (b) **(2.0 pts.)** $I = \int_{-2}^{0} \frac{3x^2}{x^2-2x+1}dx$

2. **(2.0 pts.)** Demuestre que $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}dx$ satisface la recurrencia:

$$(1+2n)I_n = (2x^n\sqrt{1+x}) - 2nI_{n-1}.$$

Problema 2.

1. **(2.0 pts.)** Determine el área del manto del sólido engendrado al rotar, en torno al eje y, el trozo de la curva $y = \frac{x^2}{2}$, comprendido entre 0 y 1.

2. Considere la espiral de ecuación paramétrica $x(t) = e^{2t}cos(t), y(t) = e^{2t}sen(t)$.

   (a) **(2.0 pto.)** Encuentre el largo L, de la curva obtenida al variar el parámetro t, desde 0 hasta 2π.

   (b) **(2.0 pto.)** Encuentre t_0 tal que, la longitud de la curva obtenida al variar el parámetro t, desde 0 a t_0, sea igual a la mitad del largo L, obtenido en la parte a).

Problema 3.

1. Considere la función $g(x)$ definida por $g(x) = \int_0^x \frac{arctg(t)}{t}dt$, donde $\frac{arctg(t)}{t}$ se define en cero por continuidad.

   (a) **(1.5 pts.)** Demuestre que: $\int_0^1 g(x)dx = g(1) - \int_0^1 arctg(t)dt$

   (b) **(1.5 pts.)** Utilizando lo anterior, muestre que: $\int_0^1 g(x)dx = g(1) - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$

2. Sea $g : IR \to IR$ una función biyectiva, diferenciable y tal que $g(0) = 0$. Sea $f : IR \to]-1,1[$ una función diferenciable. Suponga que f y g satisfacen:

$$g(x) = \int_0^{g(x)} f^2(g^{-1}(x))dx + f(x)$$

   (a) **(2.0 pts.)** Pruebe que $f(x) = tgh(g(x))$.

   (b) **(1.0 pts.)** Calcule la integral

$$\int_0^{x^3} (tgh(t))^2 dt$$

   Ind: Observe que $f(g^{-1}(x)) = tgh(x)$.