CONTROL 6

MA12A CALCULO 1999

Problema 1.

Sean $f, g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ y $g(x) = \sqrt{3} - \sqrt{1-x^2}$.

1. (3.0 pts.) Calcular el área encerrada entre ambas curvas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.
2. (3.0 pts.) Determinar el volumen del sólido generado por la rotación de la región encerrada por el eje OX y la curva $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, en torno de OX.

Problema 2.

1. (3.0 pts.) Calcular el área encerrada entre las cardioides

$$\rho = 2 + \operatorname{sen}(\varphi) \text{ y } \rho = 2 + 2\operatorname{sen}(\varphi)$$

2. Examinar la convergencia de las series

$$(1.5\,\text{pts.}) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)} \qquad\qquad (1.5\,\text{pts.}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Problema 3.

1. Para $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ continua se define la integral

$$I(f) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} f(x)\, dx.$$

(2.0 pts.) Demostrar que si existen M y b reales tales que $\forall x \in [0,\infty)$, $|f(x)| \le Me^{bx}$ entonces la integral $I(|f|)$ converge para todo $\alpha > b$.

En todo lo que sigue asuma que si $I(|g|)$ converge entonces $I(g)$ también lo hace.

2. (2.0 pts.) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función 2 veces derivable con f'' continua y tal que existen M y b reales, para los cuales $|f(x)|, |f'(x)|$ y $|f''(x)|$ son menores o iguales a Me^{bx} para todo $x \in [0,\infty)$. Demostrar, usando integración por partes, que para $\alpha > b$

$$I(f') = \alpha I(f) - f(0)$$

y con esto concluir

$$I(f'') = \alpha^2 I(f) - \alpha f(0) - f'(0)$$

3. (2.0 pts.) Usar las ecuaciones anteriores para probar que

$$I(\operatorname{sen}(wx)) = \frac{w}{\alpha^2 + w^2}$$

Duración 3 hrs.